

Série A. N° 2407

N° d'ordre : 3279

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**JEAN PELTIER**

---

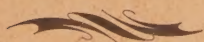
**1<sup>re</sup> THÈSE.** — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique.

**2<sup>e</sup> THÈSE.** — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 19 juin 1951 devant la Commission d'examen.

MM. J. PÈRÈS, Président.

G. DARMOIS }  
A. ARNULF } Examineurs.





# MÉTHODE NOUVELLE

permettant le calcul rapide

d'un instrument d'optique

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. A. CHATELET.

## PROFESSEURS

|                                |                                                     |                                 |                                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|
| G. JULIA .....                 | T Analyse supérieure et Algèbre supérieure.         | FAVARD .....                    | Calcul des probabilités et Physique-Mathématique. |
| A. DENJOY .....                | T Théorie des Fonctions.                            | COULOMB .....                   | T Physique du Globe.                              |
| L. LUTAUD .....                | T Géographie physique et Géologie dynamique.        | M <sup>lle</sup> COUSIN .....   | T Biologie animale (P.C.B.).                      |
| E. DARMOIS .....               | T Enseignement de Physique.                         | CHRÉTIEN .....                  | Chimie (P.C.B.).                                  |
| Robert LÉVY .....              | T Physiologie comparée.                             | P. DRACH .....                  | Zoologie.                                         |
| Henri VILLAT.....              | T Mécanique des fluides et applications.            | KASTLER .....                   | Physique.                                         |
| M <sup>me</sup> RAMART-LUCAS.  | T Chimie organique.                                 | CHATELET .....                  | T Arithmétique et théorie des nombres.            |
| FOCH .....                     | T Mécanique physique et expérimentale.              | EPHRUSSI .....                  | T Génétique.                                      |
| PAUTHENIER .....               | T Electrotechnique générale.                        | WURMSER .....                   | T Biologie physico-chimique.                      |
| DE BROGLIE .....               | T Théories physiques.                               | BAUER .....                     | T Chimie-Physique.                                |
| JOB .....                      | T Chimie générale.                                  | RIVIERE .....                   | Géologie (P.C.B.).                                |
| PRENANT .....                  | T Anatomie et Histologie comparées.                 | GAUTHERET .....                 | Biologie végétale (P.C.B.).                       |
| COMBES .....                   | T Physiologie végétale.                             | LUCAS .....                     | Physique.                                         |
| GARNIER .....                  | T Géométrie supérieure.                             | A. THOMAS .....                 | Evolution des êtres organisés.                    |
| PÉRÈS .....                    | T Mécanique rationnelle.                            | ARNULF .....                    | Optique appliquée.                                |
| HACKSPILL .....                | T Chimie minérale.                                  | MAX MORAND .....                | Physique.                                         |
| LAUGIER .....                  | T Physiologie générale.                             | SOLEILLET .....                 | Physique.                                         |
| TOUSSAINT .....                | T Technique aéronautique.                           | FORTIER .....                   | T Mécanique expérimentale des fluides.            |
| M. CURIE .....                 | T Physique (P.C.B.).                                | DANJON .....                    | T Astronomie.                                     |
| G. RIBAUD .....                | T Hautes températures.                              | FROMAGEOT .....                 | T Chimie biologique.                              |
| CHAZY .....                    | T Mécanique analytique et Mécanique céleste.        | LAPORTE .....                   | T Physique générale et Radioactivité.             |
| CROZE .....                    | T Physique théorique et physique céleste.           | JANET .....                     | Mathématiques générales.                          |
| DUPONT .....                   | T Théories chimiques.                               | PETIT .....                     | T Biologie maritime.                              |
| VALIRON .....                  | T Calcul différentiel et Calcul intégral.           | QUENEY .....                    | T Météorologie et dynamique atmosphérique.        |
| BARRABÉ .....                  | T Géologie structurale et géologie appliquée.       | GALLIEN .....                   | Biologie animale (P.C.B.).                        |
| VAVON .....                    | T Analyse et mesures chimiques.                     | EICHHORN .....                  | Biologie végétale (P.C.B.).                       |
| G. DARMOIS .....               | T Calcul des probabilités et Physique mathématique. | DE CUCNAC .....                 | Biologie végétale (P.C.B.).                       |
| Jacques BOURCART.              | T Géographie physique et Géologie dynamique.        | LAVAL .....                     | Physique (P.C.B.).                                |
| AUREL .....                    | T Chimie biologique.                                | M <sup>lle</sup> CAUCHOIS ..... | Chimie-Physique.                                  |
| M <sup>me</sup> JOLIOT-CURIE.. | T Physique générale et Radioactivité.               | THELLIER .....                  | Physique du Globe.                                |
| PLANTEFOL .....                | T Botanique.                                        | AUDUBERT .....                  | Electrochimie.                                    |
| CABANNES .....                 | T Recherches physiques.                             | L'HÉRITIER .....                | Génétique.                                        |
| GRASSÉ .....                   | T Evolution des êtres organisés.                    | GRIVET .....                    | T Radio Electricité.                              |
| PRÉVOST .....                  | T Chimie organique.                                 | PONCIN .....                    | Mécanique des fluides.                            |
| BOULIGAND .....                | T Application de l'analyse à la Géométrie.          | THIRY .....                     | T Mécanique appliquée.                            |
| CHAUDRON .....                 | T Chimie appliquée.                                 | DUBREIL .....                   | Mathématiques générales.                          |
| WYART .....                    | T Minéralogie.                                      | QUELET .....                    | Chimie (P.C.B.).                                  |
| TEISSIER .....                 | T Zoologie.                                         | CAGNIARD .....                  | Géophysique appliquée.                            |
| MANGENOT .....                 | T Biologie végétale.                                | CHAMPETIER .....                | Chimie appliquée.                                 |
| P. AUGER .....                 | T Physique quantique et relativité.                 | CUVILLIER .....                 | Géologie structurale et Géologie appliquée.       |
| MONNIER .....                  | Physiologie générale.                               | JUNG .....                      | Pétrographie.                                     |
| PIVETEAU .....                 | T Géologie.                                         | TRILLAT .....                   | Physique (P.C.B.).                                |
| ROCARD .....                   | T Physique.                                         | WIEMANN .....                   | Chimie (P.C.B.).                                  |
| H. CARTAN .....                | T Mathématiques générales.                          | LICHNEROWICZ. ....              | Mathématiques.                                    |
| SCHAEFFER .....                | T Physiologie des fonctions.                        | JACQUINOT .....                 | Physique (P.C.B.).                                |
| LAFFITTE .....                 | T Chimie générale.                                  | VASSY .....                     | Physique de l'atmosphère.                         |
|                                |                                                     | DESTOUCHES .....                | Théories physiques.                               |
|                                |                                                     | M. PRUVOST .....                | T Géologie.                                       |
|                                |                                                     | AMIEL .....                     | Chimie (P.C.B.).                                  |
|                                |                                                     | HOCART .....                    | Minéralogie.                                      |
|                                |                                                     | MACHEBŒUF .....                 | Microbiologie.                                    |
|                                |                                                     | J.P. MATHIEU .....              | Physique (P.C.B.).                                |
|                                |                                                     | COUTEAUX .....                  | Biologie animale (P.C.B.).                        |
|                                |                                                     | MAY .....                       | Biologie animale (P.C.B.).                        |

Secrétaire..... CH. MONIER.

Série A. N° 2407

N° d'ordre : 3279

---

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**JEAN PELTIER**

---

**1<sup>re</sup> THÈSE.** — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique.

**2<sup>e</sup> THÈSE.** — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 19 juin 1951 devant la Commission d'examen.

MM. J. PÉRÈS, Président.

G. DARMOIS }  
A. ARNULF } Examineurs.



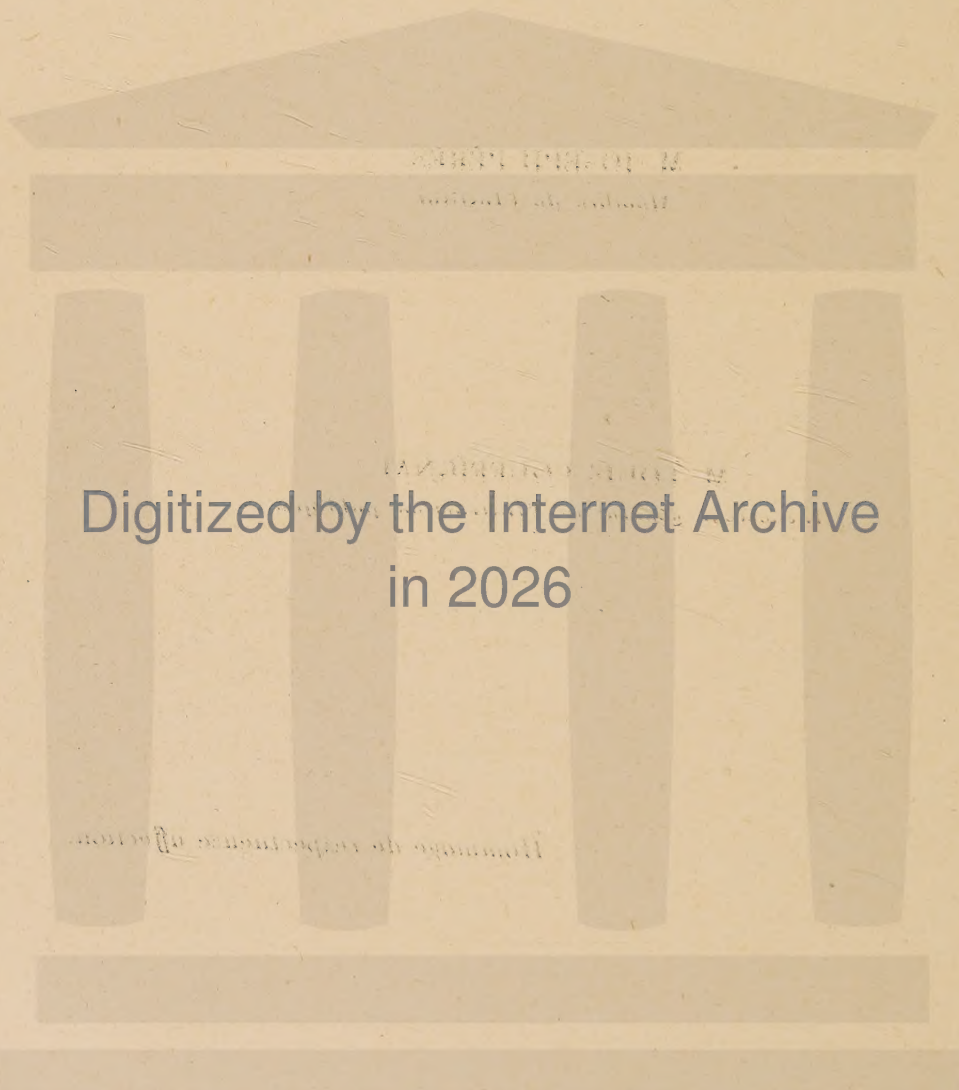


*A mes Maîtres,*

M. JOSEPH PÉRES  
*Membre de l'Institut*

M. LOUIS COUFFIGNAL  
*Inspecteur général de l'Instruction publique*

*Hommage de respectueuse affection.*



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41552427\\_0042](https://archive.org/details/IA41552427_0042)

L'expression ici est plus vive, et plus  
bien tenue, se charge de la composition du texte, à M. Louis de La  
CHAPÈLE, qui a eu l'obligeance d'assurer l'impression des tableaux de  
calculs numériques, à M. A. MES PARENTS, à qui furent confiées les  
pages d'introduction et à M. Bernard HALLKIN, qui a effectué le dessin des  
courbes d'abscisses.

A MA FEMME,

A TOUS MES COLLABORATEURS  
DU LABORATOIRE DE CALCUL MÉCANIQUE,

*J'exprime ici ma plus vive gratitude à M<sup>me</sup> SIESTRUNCK, qui a bien voulu se charger de la composition du texte, à M. Louis de LA CHAPELLE, qui a eu l'obligeance d'assurer l'impression des tableaux de calculs numériques, à M<sup>me</sup> Denise ROLLAND, à qui furent confiées les pages d'errata, et à M. Bernard HALKIN, qui a effectué le dessin des courbes d'aberrations.*

*Ce travail, et notamment l'ensemble des calculs numériques qu'a nécessités sa préparation, a été effectué au Laboratoire de Calcul mécanique.*

## PREMIERE THESE

-:-:-:-:-

METHODE NOUVELLE PERMETTANT LE CALCUL RAPIDE  
D'UN INSTRUMENT D'OPTIQUE

## INTRODUCTION.

Le problème du calcul d'un instrument d'optique ne peut en général, dans sa double complexité mathématique et physique, recevoir de solution mathématique rigoureuse qui satisfasse pleinement à la fois le calculateur et le physicien. Ce problème se décompose en effet en deux problèmes partiels entre lesquels aucune cloison étanche ne saurait être introduite sans risque de compromettre la valeur du résultat:

1) La mise en équations du problème physique. Il s'agit ici de définir quantitativement la qualité d'une image, c'est-à-dire en fait, de déterminer, de manière approchée seulement, les tolérances que l'on pense devoir admettre pour les différentes aberrations considérées afin que l'image ait une qualité acceptable.

2) La résolution du système d'équations obtenu, comportant la détermination des équations effectivement introduites dans le calcul, le choix d'un système de variables convenables et la recherche d'une méthode de résolution rationnelle.

Nous nous proposons, dans le présent travail, de chercher une solution du deuxième problème, d'aspect plutôt mathématique, qui se ramène au suivant: à partir d'une certaine combinaison optique, en général assez mal corrigée des aberrations, calculer une autre combinaison devant satisfaire à des conditions optiques et mécaniques fixées a priori.

En fait, les deux problèmes, loin d'être autonomes, se superposent en donnant une résultante fort complexe. C'est ainsi qu'une combinaison satisfaisant, du point de vue de la réduction des aberrations, à toutes les conditions imposées à l'avance, peut être inacceptable pour des raisons à la fois optiques et mécaniques; il faut alors la modifier en tenant compte des nouvelles conditions imposées. Une méthode de calcul

bien construite doit pouvoir procéder à de tels changements de directions: elle doit être capable de fournir la solution de tout problème optique, à la double condition que celui-ci soit posé avec netteté et qu'il admette réellement une solution, cette éventualité étant d'ailleurs rarement une certitude.

C'est avec cet esprit que nous entrerons dans le corps du sujet. Auparavant, il semble intéressant de rechercher les publications qui se rapportent à cette importante question et l'on est en droit d'espérer y trouver des méthodes complètes et détaillées de calcul optique. Voyons ce qu'il en est en les passant brièvement en revue.

A la fin de ce travail, nous avons dressé une liste de mémoires et de traités qui, plus ou moins, étaient susceptibles d'aborder le problème qui nous intéresse ici. Nous avons essayé de les grouper selon la nature des sujets abordés.

Nous avons réuni d'abord en un premier groupe les auteurs qui ont envisagé la question avec quelques généralités, mais à laquelle ils n'ont pas donné de solution complète. M. Boulouch (1) qui a cherché à éliminer les variables intermédiaires entre la première et la dernière surface, en introduisant comme inconnues les rapports de convergence, M. Chrétien (3) qui a rassemblé dans un important traité les matériaux apportés par ses prédécesseurs (à l'exclusion cependant de M. Boulouch), et M. Biot (2) qui, **en quelques pages, a défini le principe des méthodes actuellement en usage** dans les bureaux de calcul optique.

En second lieu, se placent les publications relatives au calcul des systèmes de lentilles minces corrigés des aberrations du 3<sup>e</sup> ordre seulement; elles peuvent rendre de grands services aux ingénieurs car elles leur permettent de dégrossir le problème avant de chercher une solution définitive; mais cette dernière n'est pas envisagée et le problème n'est pas résolu.

Les méthodes différentielles des mémoires des groupes III et IV sont, par essence, strictement limitées à des calculs et à des retouches finales procédant par de faibles variations de courbures et d'épaisseurs; mais leurs auteurs n'indiquent nullement comment ils se servent des formules qu'ils établissent, bien qu'eux-mêmes doivent en tirer un parti remarquable.

Nous avons réuni sous le numéro III les opticiens qui ont appliqué leurs méthodes à des exemples concrets de répliques, mais sans permettre d'apercevoir le procédé de calcul effectivement utilisé.

Les auteurs du groupe V nous écartent un peu de notre sujet; ils se proposent en effet de calculer des objectifs essentiellement minces corrigés de certaines aberrations seulement; il s'agit là de problèmes trop restreints pour qu'ils soient susceptibles d'une généralisation immédiate. L'exemple le plus récent, d'ailleurs fort simple, a été fourni au cours du Colloque international sur la théorie des images optiques (octobre 1946) par M. SMITH, qui, donnant un exemple de calcul d'un système optique, détermine les rayons de courbure d'un système de deux lentilles minces accolées, corrigé du chromatisme paraxial.

Tout autre est l'objet des recherches entreprises par les opticiens du groupe VI, en particulier par MM. HERGENROTTER, HOPKINS, SMITH qui, ayant repris les travaux anciens de HAMILTON, BRUNN, SAFFORD, SCHWARZSCHILD, développés à partir du principe de FERMAT et des fonctions canoniques, ont obtenu des formules d'addition des aberrations, de forme algébrique d'ailleurs très complexes; certains ont essayé de donner, de l'imagerie optique des formes (Smith 56) ou tensorielles (Epheser 34, Ossen 48) il leur reste à montrer comment de telles expressions facilitent l'inversion du problème. Ce point n'est nullement élucidé; ainsi nous sera-t-il impossible de comparer la méthode que nous développons à celle qu'ils doivent utiliser personnellement.

Enfin, malgré leur intérêt certain en optique instrumentale, les autres mémoires et traités que nous signalons sont trop éloignés du problème du calcul des instruments d'optique pour qu'ils retiennent notre attention: développements d'aberrations en plusieurs ordres sans indication sur l'inversion du problème (groupe VII), études de dioptrique élémentaire et de dioptrique du 3<sup>e</sup> ordre (groupe VIII), mémoires portant sur l'étude géométrique des faisceaux lumineux et des caustiques (groupe IX) traités d'optique géométrique fournissant parfois de véritables catalogues d'objectifs, mais n'indiquant aucune méthode de calcul (groupe X) publications enfin qui n'établissent que des marches trigonométriques et analytiques.

Que fait ressortir la lecture d'une telle bibliographie? Il apparaît que l'activité des recherches d'optique géométrique est intense, mais que les méthodes de calcul actuellement en usage ne sont décrites que sommairement; nous pouvons, croyons nous, avec MM. LIOT et CHETLEN, classer ces méthodes en deux groupes:

1) Si l'on part d'un objectif déjà connu et voisin de celui que l'on désire obtenir, le problème se réduit à des calculs successifs d'autant moins nombreuses que le calculateur aura plus d'expérience et aussi une documentation plus volumineuse. Les variations des éléments de construction obtenues en utilisant des formules différentielles comme celles de HARTING (6) LEMAN (7) KOEHLER (58), valables seulement pour de petites variations (par exemple des variations relatives de 1 ou 2 % pour les courbures).

2) Si l'on veut construire un objectif nouveau, on en calcule une forme approchée en résolvant un système d'équations algébriques établies à l'aide de formules de Seidel pour les aberrations du 3<sup>e</sup> ordre, et en supposant le système formé de lentilles minces (parfois même accolées). On est alors ramené aux méthodes de tâtonnements du 1<sup>er</sup>.

Nous arrivons ainsi à la conclusion énoncée par M. BOUTRY (81) en 1946:

Il n'existe pas de théorie mathématique cohérente et complète du calcul des objectifs photographiques. Les exigences formulées sont trop loin de l'approximation du 3<sup>e</sup> ordre pour que celle-ci rende des services vraiment sûrs; les théories générales relatives au calcul des aberrations conduisent à des expressions d'utilisation pratique difficile: l'objectif photographique s'est développé lentement entre les mains de calculateurs

expérimentés, par modifications successives de types connus. De temps en temps, l'intuition d'un inventeur a créé une forme nouvelle à partir de laquelle les perfectionnements et les tâtonnements ont repris: ce travail difficile continue depuis un siècle et l'on conçoit l'avantage important que tirent de leurs dossiers de calculs accumulés les constructeurs qui se sont longtemps spécialisés dans ce domaine.

Pour être complet en ce qui concerne l'état actuel de l'optique géométrique dans les bureaux de calcul, nous croyons devoir mentionner cette constatation que M. CHRETIEN a faite dans son traité (édition 1938 p.1234) et que l'expérience confirme:

"Cependant les procédés adoptés et les méthodes consacrées ne sont, pour ainsi dire, pas accessibles aux personnes étrangères à ces bureaux. Rien de systématique n'a encore été publié sur cette importante question, et il semble que chaque calculateur ait gardé jalousement secrètes les méthodes qu'il a dû créer pour son usage personnel, selon ses habitudes de calcul et selon la nature de ses problèmes particuliers.

Dans ces conditions, nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt de rechercher une méthode générale de calcul mettant en évidence les principes mathématiques énoncés au début de cette introduction, c'est-à-dire d'essayer de choisir des systèmes de variables et de fonctions, et une méthode de résolution du système d'équations obtenu, à condition toutefois que les exigences optiques aient été auparavant nettement définies.

Nous avons à cet effet introduit, au chapitre I, les rapports de convergence choisis comme variable par M. Boulouch et obtenu de nouvelles formules de dioptrique élémentaire. Nous avons réuni dans le chapitre II d'autres formules de l'approximation de GAUSS permettant l'élimination des éléments pupillaires en vue de certains problèmes pouvant se présenter dans certains avant-projets. Le chapitre III établit le lien entre les formules d'aberrations du 3<sup>e</sup> ordre de Seidel et celles de M. Boulouch en complétant ces dernières. Au chapitre IV, nous indiquons les grands traits de la méthode de résolution choisie pour un système d'équations quelconque.

Le chapitre V contient les formules nécessaires pour la résolution numérique et qui comprennent le calcul des fonctions et celui des dérivées.

Enfin, au chapitre VI, nous donnerons quelques résultats concrets obtenus par la méthode que nous proposons ici.

---

## Chapitre I.

### FORMULES PARAXIALES FONDAMENTALES.

#### PROBLEME D'ELIMINATION DES ELEMENTS INTERMEDIAIRES.

Chaque fois que l'on veut calculer un instrument d'optique, on se heurte tout d'abord à une difficulté importante: l'élimination des éléments intermédiaires entre l'espace-objet et l'espace-image. La simple équation de conjugaison, pour chaque dioptré, qui, avec les notations usuelles, s'écrit:

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n' - n}{r}$$

et l'équation de passage d'un dioptré au suivant:

$$x_{2j+1} = x_{2j-1} - e_{2j}$$

montrant que la position de l'image définitive par rapport au système optique est une fonction de celle de l'objet, de forme algébrique très compliquée (c'est une fraction continue); il faut donc renoncer à utiliser directement ces équations pour le calcul synthétique d'un instrument.

Aussi, M. Boulouch a-t-il préféré substituer aux abscisses des images intermédiaires de nouvelles variables: les rapports de convergence, le rapport des angles des rayons lumineux avec l'axe dans l'approximation de Gauss.

Les deux systèmes de variables sont homographiques, et les rapports de convergence ont sur les abscisses paraxiales le grand avantage de permettre l'élimination désirée, puisque le rapport de convergence du système total est égal simplement au produit des rapports de convergence des dioptrés qui le composent. En outre, le choix de ces variables va, dans les chapitres qui suivent, se montrer particulièrement fécond.

#### 2. RELATIONS ENTRE LES ABCISSES DES DEUX POINTS CONJUGUES ET LEURS RAPPORTS

##### DE CONVERGENCE.

Ces relations établies pour la première fois par M. Boulouch (p.1 à 22 de sa thèse), sont fondamentales. L'auteur les a obtenues à partir d'une expression très générale des focales en prenant des points

conjugués quelconques comme origines dans les différents milieux; les formules annoncées en sont des cas particuliers. Nous allons les retrouver par une méthode différente de celle qu'il a employée, et d'ailleurs plus simple.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par  $\overline{PF} = f$  la distance focale objet d'un système centré, mesurée à partir du plan principal objet  $\pi$ , par  $x, x'$  les abscisses de deux points conjugués, rapportées aux plans principaux,  $v, v'$  les angles des rayons incidents et émergents,  $\gamma = \frac{v}{v'}$  le rapport de convergence correspondant,  $n, n'$  les indices de réfraction des espaces objet et image respectivement.

Dans ces conditions, l'équation de conjugaison s'écrit:

$$1) \quad \frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = -\frac{n}{f}$$

et l'on a d'autre part:

$$2) \quad vx = v'x'$$

De ces deux relations, nous déduisons:

$$3) \quad \begin{cases} x = f. \frac{nv - n'v'}{nv} = f. \frac{n - n'\gamma}{n} \\ x' = f. \frac{nv - n'v'}{nv'} = f. \frac{n - n'\gamma}{n\gamma} \end{cases}$$

### 3. RELATIONS ENTRE LES RAPPORTS DE CONVERGENCE DE DEUX COUPLES DE POINTS CONJUGUES.

Soient  $(x, x'), (x_1, x'_1)$  les abscisses de deux couples de points conjugués et  $(\gamma, \gamma_1)$  leurs rapports de convergence.

Posons alors:  $x - x_1 = \xi$ ,  $x' - x'_1 = \xi'$ .

On trouve, d'après les relations (3):

$$4) \quad \begin{cases} \xi = n' \cdot \frac{f}{n} \cdot (\gamma_1 - \gamma) \\ \xi' = n \cdot \frac{f}{n'} \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma \gamma_1} \end{cases}$$

d'où l'on tire successivement:

$$\frac{\xi}{\xi'} = \frac{n'}{n} \cdot \gamma \gamma_1, \quad \text{soit:} \quad \gamma_1 = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\xi}{\xi'} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

$$\xi = \frac{n'}{n} \cdot f \left( \frac{n}{n'} \cdot \frac{\xi}{\xi'} \cdot \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) = \frac{f}{\gamma} \times \frac{\xi}{\xi'} - \frac{n'}{n} \cdot f \gamma$$

c'est-à-dire enfin:

$$\frac{1}{n^0 \xi^0 \sigma} = \frac{\sigma}{n \xi} = \frac{1}{n^0 f}$$

#### 4. COMBINAISON DE DEUX SYSTEMES CENTRES.

Considérons deux systèmes centrés ( $S_1$ ) et ( $S_3$ ) séparés par un milieu d'indice  $n_2$ , les indices des milieux objet et image étant  $n_0$  et  $n_4$ .

Soient  $I_0, I_2, I_4$  trois points conjugués par rapport à ces systèmes situés respectivement dans l'espace-objet, l'espace intermédiaire et l'espace-image. Nous prendrons chacun de ces points comme origine dans l'espace qui le contient et nous affecterons d'indices 1 et 3 les éléments relatifs aux systèmes ( $S_1$ ) et ( $S_3$ ), réservant l'emploi des majuscules pour le système résultant. Nous aurons ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n_2 \xi_1' \sigma_1} - \frac{\sigma_1}{n_0 \xi_1} = \frac{1}{n_2 f_1} \\ \frac{1}{n_4 \xi_3' \sigma_3} - \frac{\sigma_3}{n_2 \xi_3} = \frac{1}{n_4 f_3} \\ \frac{1}{n_4 \xi_3' \Gamma} - \frac{\Gamma}{n_0 \xi_1} = \frac{1}{n_4 F} \end{array} \right.$$

Mais l'on a aussi:  $\xi_3 = \xi_1'$

D'où, par élimination de ces abscisses intermédiaires:

$$\frac{1}{n_4 \xi_3' \sigma_3} - \frac{\sigma_3}{n_2 \xi_1} = \frac{\sigma_3}{n_2 f_1} + \frac{1}{n_4 f_3 \sigma_1}$$

et puisque:

$$\sigma_1 \sigma_3 = \Gamma$$

il vient finalement:

$$6) \quad \frac{1}{n_4 F} = \frac{\sigma_3}{n_2 f_1} + \frac{1}{n_4 f_3 \sigma_1}$$

ou, sous une forme plus symétrique:

$$7) \quad \frac{v_2}{n_4 F} = \frac{v_4}{n_2 f_1} + \frac{v_0}{n_4 f_3}$$

M. Boulouch écrit cette formule (p. 21 de sa thèse) sous une forme plus symétrique encore et plus séduisante en utilisant (sans le dire) la notation de Gullstrand:

$$n^0 f = k.$$

La relation (7) s'écrit alors:

$$8) \quad \frac{v_2}{K} = \frac{v_4}{k_1} + \frac{v_0}{k_3}.$$

## 5. - INSUFFISANCE DES FORMULES PRECEDENTES.

A l'aide de ces formules et en utilisant la notation de Gullstrand, M. Boulouch a voulu édifier une théorie qui permettrait le calcul systématique des instruments d'optique. Or, il n'a pu y parvenir parce que, comme ses prédécesseurs, il n'a pas respecté certains principes mathématiques à nos yeux essentiels:

a) Les formules d'optique géométrique ayant une forme algébrique homogène séparément par rapport aux longueurs, aux indices et aux angles des rayons lumineux avec l'axe, il importe de leur conserver cette propriété, c'est-à-dire, d'abandonner la notion de lentille pour ne plus utiliser que celle de dioptre, car la valeur unitaire de l'indice de l'air détruit l'Homogénéité par rapport aux indices.

b) Il importe de ne pas compromettre la généralité d'une méthode ou d'un résultat en cherchant la solution d'un problème trop restreint. Ainsi les formules (cf. les équations n° 9 à 13) qui constituent la clé de notre méthode de calcul résultent immédiatement de la réunion des deux relations (9). Or, dans les applications qu'il donne dans sa thèse, l'une p. 49 et suivantes, l'autre p. 189 et suivantes, M. Boulouch entreprend une élimination dont la nature est guidée par l'exemple particulier fort simple qu'il a choisi. Sans entrer dans les détails, disons simplement qu'il avait à réunir les deux relations suivantes écrites pour une lentille:

$$\frac{u_1}{K} = \frac{u_2}{k} + \frac{u}{k_1}$$

$$\frac{1}{nK} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k_1} + \frac{e}{kk_1}$$

Les  $u$  étant des angles de rayons lumineux avec l'axe et les  $k$  des puissances frontales. Or, l'élimination de l'angle intermédiaire  $u_1$  entre la première relation et les équations annulant le chromatisme, permet de résoudre ces équations parce que celles-ci sont relativement simples.

Cette méthode n'est malheureusement plus applicable dès que les équations à résoudre sont plus complexes (équations aux aberrations géométriques), et d'ailleurs celles-ci, ne permettant d'annuler que les aberrations du troisième ordre, ne suffisent en aucune façon à calculer un objectif.

Or, nous allons montrer au paragraphe suivant comment l'élimination de  $K$  et l'application de ces deux relations à un ensemble de deux dioptries consécutifs quelconques permettent de franchir un grand pas pour atteindre le but final : il fallait abandonner, pour cela, toute idée de lentilles (de puissance  $K$ ) et chercher une combinaison de formules aboutissant à des relations générales entre les différents éléments géométriques composant le système optique, indépendantes du type d'objectif choisi et de la nature des aberrations à corriger.

## 6. ELIMINATION DES FOCALES DES DIOPTRIES COMPOSANTES

Selon les notations usuelles, nous affecterons d'indices impairs les éléments relatifs aux surfaces et d'indices pairs les éléments relatifs aux espaces et milieux intermédiaires.  $F$  sera la focale-objet du système total,  $F'$  la focale image (en général,  $F = -F'$ , sauf pour l'objectif à immersion),  $f_{2j-1}$  la focale-objet du dioptrie de rang  $j-1$  (donc d'indice  $2j-1$ ),  $(F_{2j-3, 2j-1})$  la focale objet du système formé des dioptries d'indices  $2j-3$  et  $2j-1$ , écartés de la distance  $e_{2j-2}$ .

Enfin, le dernier dioptrie aura pour rang  $p$ . Dans tout ce qui suit, il ne sera, pour ainsi dire, plus jamais question de lentilles.

Dans ces conditions, pour chaque groupe de deux dioptries consécutifs, nous avons le système des relations suivantes que, par commodité d'écriture, nous appliquerons aux dioptries 1 et 3:

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{F_{1,3}} = - \frac{f'_1 - f_3 - e_2}{f_1 f_3} \\ \frac{-v_2}{n_4 F_{1,3}} = \frac{v_4}{n_2 f_1} + \frac{v_0}{n_4 f_3} \end{array} \right.$$

ce qui peut s'écrire encore:

$$\frac{1}{F_{1,3}} = \frac{1}{f_1} + \frac{n_2}{n_0} \cdot \frac{1}{f_2} + \frac{e_2}{f_1 f_3} = \frac{n_4}{n_2} \cdot \frac{v_4}{v_2} \cdot \frac{1}{f_1} + \frac{v_0}{v_2} \cdot \frac{1}{f_3}$$

c'est-à-dire:

$$10) \quad \frac{n_4 v_4 - n_2 v_2}{n_2 v_2} \cdot \frac{1}{f_1} - \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0 v_2} \cdot \frac{1}{f_3} = \frac{e_2}{f_1 f_3}$$

D'où les équations:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{n_4 v_4 - n_2 v_2}{n_2} \cdot f_3 - \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 = e_2 v_2 \\ & \frac{n_6 v_6 - n_4 v_4}{n_4} \cdot f_5 - \frac{n_4 v_4 - n_2 v_2}{n_2} \cdot f_3 = e_4 v_4 \end{aligned} \right. \\
 11) & \text{-----} \\
 & \left\{ \begin{aligned} & \frac{n_{2j} v_{2j} - n_{2j-2} v_{2j-2}}{n_{2j-2}} \cdot f_{2j-1} - \frac{n_{2j-2} v_{2j-2} - n_{2j-4} v_{2j-4}}{n_{2j-4}} \cdot f_{2j-3} = e_{2j-2} v_{2j-2} \\ & \text{-----} \\ & \frac{n_{2p} v_{2p} - n_{2p-2} v_{2p-2}}{n_{2p-2}} \cdot f_{2p-1} - \frac{n_{2p-2} v_{2p-2} - n_{2p-4} v_{2p-4}}{n_{2p-4}} \cdot f_{2p-3} = e_{2p-2} v_{2p-2} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

et, par simple addition des  $(j-1)$  premières ou des  $(p-j+1)$  dernières équations (11):

$$\begin{aligned}
 12) & \left\{ \begin{aligned} & \frac{n_{2j} v_{2j} - n_{2j-2} v_{2j-2}}{n_{2j-2}} \cdot f_{2j-1} = \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 + \sum_{i=1}^{i=j-1} e_{2i} v_{2i} \\ 13) & \left\{ \begin{aligned} & \frac{n_{2j} v_{2j} - n_{2j-2} v_{2j-2}}{n_{2j-2}} \cdot f_{2j-1} = - \frac{n_{2p} v_{2p} - n_{2p-2} v_{2p-2}}{n_{2p-2}} \cdot f_{2p-1} + \sum_{i=j-1}^{i=p-1} e_{2i} v_{2i} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Ainsi, les focales des  $(p-1)$  dernières dioptries du système peuvent s'exprimer facilement en fonction de la focale du premier. Nous verrons que cette dernière s'éliminera au moyen de l'équation de convergence.

## 7. EXPRESSION DES RAYONS DE COURBURE EN FONCTION DES ANGLES $v$ .

Le rayon de courbure d'un dioptre a pour expression, avec nos conventions de signes:

$$r = - \frac{n' - n}{n} \cdot f$$

Il suffit, dans les applications, de remplacer  $f$  par son expression en fonction des angles  $v$ .

## 8. INTRODUCTION DE LA FOCAL F DU SYSTEME - EQUATION DE CONVERGENCE.

### a) Cas où l'objet est à l'infini.

Soient  $F_1'$  et  $F'$  les foyers du premier dioptre et du système total,  $f_1'$  et  $F'$  leurs focales respectives,  $v_2$  et  $v'$  les angles des rayons réfractés  $IF_1'$  et  $IF'$  supposés infiniment voisins de l'axe. On a:

$$\frac{v'}{v_2} = \frac{f_1'}{F'}$$

$$\frac{v_1}{f_1} = -\frac{n_2}{n_1} \quad , \quad \frac{v_2}{f_2} = -\frac{n_3}{n_2}$$

$n'$  désignant l'indice du milieu-image.

On a donc:

$$14) \quad \frac{v'}{v_2} = \frac{n_2}{n'} \cdot \frac{f_1}{F}$$

C'est l'équation de convergence du système.

b) Cas où l'image est à l'infini.

Ce cas se ramène au précédent, par un renversement du sens de la lumière: on prend l'objet comme image et l'image comme objet.

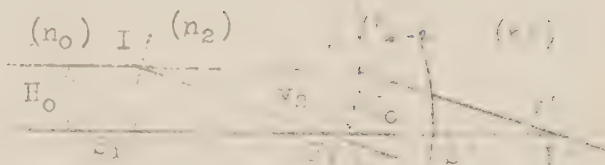


Fig. 1

c) Cas où l'objet et l'image sont tous deux à distance finie.

Appliquons la deuxième formule (9) au système formé d'un dioptré, de focale  $(2j-1)$ , et du système formé par les  $(j-1)$  dioptries qui le précèdent, dont nous désignerons la focale par  $F_{1,j-1}$ . Il vient:

$$15) \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_2}{n_4 F_{1,3}} = \frac{v}{n_2 f_1} + \frac{v_0}{n_4 f_3} \\ \frac{v_4}{n_6 F_{1,5}} = \frac{v_2}{n_4 F_{1,3}} + \frac{v_0}{n_6 f_5} \\ \frac{v_6}{n_8 F_{1,7}} = \frac{v_4}{n_6 F_{1,5}} + \frac{v_0}{n_8 f_7} \\ \frac{v_8}{n_{10} F_{1,9}} = \frac{v_6}{n_8 F_{1,7}} + \frac{v_0}{n_{10} f_9} \\ \vdots \\ \frac{v_{2p-2}}{n_{2p} F_{1,2p-1}} = \frac{v_{2p-2}}{n_{2p-2} F_{1,2p-2}} + \frac{v_0}{n_{2p} f_{2p-1}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \frac{v_2 v_4}{v_0 v_6} \\ \frac{v_2}{v_6} = \frac{v_2 v_4}{v_4 v_6} \\ \frac{v_2}{v_6} \times \frac{v_4}{v_8} = \frac{v_2 v_4}{v_6 v_8} \\ \frac{v_2 v_4}{v_6 v_8} \times \frac{v_6}{v_{10}} = \frac{v_2 v_4}{v_8 v_{10}} \\ \vdots \\ \frac{v_2 v_4}{v_{10-2} v_{10}} \end{array} \right.$$

En multipliant ces équations respectivement par les quantités indiquées à droite du trait vertical, et en ajoutant membre à membre, nous obtenons:

$$\frac{v_{2p-2}}{n_{2p} F_{1,2p-1}} \frac{v_2 v_4}{v_{2p-2} v_{2p}} = \frac{v_4}{n_2 f_1} + v_2 v_4 \left( \frac{1}{n_4 f_3} \frac{v_0}{v_2 v_4} + \frac{1}{n_6 f_5} \frac{v_0}{v_4 v_6} + \dots + \frac{1}{n_{2p-2} f_{2p-2}} \frac{v_0}{v_{10-2} v_{10}} \right)$$

c'est-à-dire:

$$16) \quad \frac{1}{n_{2p}^F} \cdot \frac{1}{v_{2p}} = \frac{1}{n_2^F v_2} + v_0 \sum_{j=2}^{j=p} \frac{1}{n_{2j}^F v_{2j-1} v_{2j-2} v_{2j}}$$

ou bien:

$$17) \quad \frac{1}{n_{2p}^F} \cdot \frac{1}{v_{2p}} = v_0 \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{n_{2j}^F v_{2j-1} v_{2j-2} v_{2j}}$$

La forme (17) est plus symétrique par rapport à l'ensemble des dioptries mais la forme (16) montre mieux ce que devient la formule quand l'objet s'éloigne à l'infini: on retrouve bien l'équation (14) puisqu'alors  $v_0 = 0$

Remarquons aussi que, dans un système afocal, les rapports de convergence de l'objet et de ses images successives sont liés entre eux et avec les focales des dioptries composants par la relation:

$$18) \quad \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{n_{2j}^F v_{2j-1} v_{2j-2} v_{2j}} = 0$$

pour un objet à distance finie.

## 9. - NOUVELLES EXPRESSIONS DES ABSCISSES DES IMAGES PARAXIALES SUCCESSIVES

### ET DES RAYONS DE COURBURE.

Nous avons obtenu au paragraphe 2 les formules (3):

$$x = f \cdot \frac{nv - n^0 v^0}{nv}, \quad x^0 = f \cdot \frac{nv - n^0 v^0}{nv^0}$$

La formule (12) du paragraphe 6 donne immédiatement:

$$19) \quad \begin{cases} x_{2j-1} = - \frac{1}{v_{2j-2}} \cdot \left[ \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 + \sum_{i=1}^{i=j-1} e_{2i} v_{2i} \right] \\ x_{2j}^0 = - \frac{1}{v_{2j}} \cdot \left[ \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 + \sum_{i=1}^{i=j-1} e_{2i} v_{2i} \right] \end{cases}$$

de même:

$$20) \quad r_{2j-1} = - \frac{n_{2j} v_{2j} - n_{2j-2} v_{2j-2}}{n_{2j} v_{2j} - n_{2j-2} v_{2j-2}} \cdot \left[ \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 + \sum_{i=1}^{i=j-1} e_{2i} v_{2i} \right]$$

## 10. - AVANTAGES DES FORMULES PRECEDENTES.

Les résultats obtenus au cours de ce chapitre ouvrent la voie à la solution simple de nombreux problèmes qui se posent dans le calcul synthétique d'un instrument devant satisfaire à toutes les exigences d'un avant-projet. C'est ainsi qu'on pourra exprimer qu'une lentille ou un ensemble de lentilles appartenant au système à une focale donnée, en utilisant une ou plusieurs formules (15) et en évaluant les focales  $f_{2j-1}$

au moyen des formules (12), compte tenu de l'équation de convergence.

De même, les formules (19) permettant de placer d'avance et avec exactitude un diaphragme ou un micromètre oculaire devant être avec l'objet ou l'image dans un grandissement donné, ou, ce qui revient au même, dans un rapport de convergence donné.

## Chapitre II.

### AUTRES FORMULES DE L'APPROXIMATION DE GAUSS.

#### 1) HAUTEURS D'INCIDENCE DES RAYONS LUMINEUX.

Les formules classiques qui servent de base au calcul algébrique d'un système centré comportant d'autres variables que les rayons de courbure, les épaisseurs et les abscisses des images paraxiales: ce sont les hauteurs d'incidence objectives et pupillaires, et l'invariant d'Abbe:

$$\mathcal{L} = n \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{v} \right) = n' \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{v'} \right)$$

a) Nous définirons, avec M. Chrétien, les coefficients  $h_j$  des hauteurs  $H_j$  d'incidence des rayons objectifs sur les dioptries  $j$  dans le cas de l'approximation de Gauss par la relation:

$$h_j = \frac{H_j}{H_0};$$

$H_0$  étant la hauteur du rayon incident dans le plan de la pupille d'entrée.

On a immédiatement:

$$h_{j+2} = h_j \cdot \frac{x_{j+2}}{x_j'} = h_j \cdot \left( 1 - \frac{e_{j+1}}{x_j'} \right)$$

$$h_j = \frac{H_1}{H_0} = \frac{x_1}{x_1 - p_1}.$$

$p_1$  étant l'abscisse de la pupille d'entrée par rapport au sommet du premier dioptre.

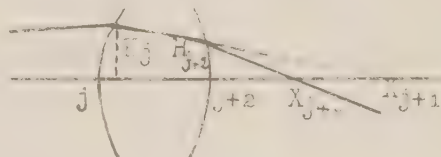


fig. 2

b) De même, nous poserons:

$$k_j = - \frac{K_j}{n_0 u_0},$$

$u_0$  étant l'angle sous lequel on voit  
du centre de la pupille d'entrée,  
un élément  $XA$  de l'objet, et  $K_j$   
la hauteur, sur le dioptré  $S_j$ , du  
rayon réfracté venant du rayon  $AP_0$ .  
Puisque:

$$u_0 = \frac{y_0}{x_1 - p_1}, \quad K_1 = - \frac{p_1}{x_1 - p_1} \cdot y_0$$

on a:

$$k_1 = \frac{p_1}{n_0}$$

En général:

$$k_{j+2} = k_j \cdot \frac{p_{j+2}}{p_j^0} = k_j \left(1 - \frac{e_{j+1}}{p_j^0}\right)$$

Comme pour les hauteurs objectives.

c) Enfin, la relation de Lagrange pour un dioptré quelconque:

$$nyv = n'y'v'$$

s'écrit:

$$n(x-p) \operatorname{tg} \theta \cdot \left(-\frac{H}{x}\right) = n'(x'-p') \operatorname{tg} \theta' \cdot \left(-\frac{H'}{x'}\right) \\ = C^{\text{ste}} \text{ tout le long de l'instrument.}$$

c'est-à-dire, puisque:  $\operatorname{tg} \theta = -\frac{K}{p}$ ,

on aura:  $(\mathcal{L}_p - \mathcal{L}_x) h k = C^{\text{ste}}$ ,

$\mathcal{L}_p$  et  $\mathcal{L}_x$  désignent les invariants paraxiaux d'Abbe, objectif et pupillaire. En appliquant cette relation à la première surface, on trouve aisément:

$$21) \quad \mathcal{L}_p - \mathcal{L}_x = -\frac{1}{h k}.$$

Cette formule, appelée la première formule de Seidel, va nous permettre (cf. par. 16) de trouver un nouvel invariant qui nous sera utile, dans les applications, pour éliminer les éléments pupillaires.

## 12. CALCUL DES COEFFICIENTS $h$ EN FONCTION DES RAPPORTS DE CONVERGENCE

### OBJECTIFS.

Nous avons, pour un dioptré quelconque:

$$H = vx = v'x' = vf \cdot \frac{n-n'\theta}{n} = f \cdot \frac{nv-n'v'}{n},$$

donc, pour le dioptré  $S_j$ :

$$22) \quad h_{2j-1} = \frac{1}{H_0} \cdot f_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} v_{2j-2} - n_{2j} v_{2j}}{n_{2j-2}}$$



Fig. 3

Cette relation peut être mise sous une autre forme, car si  $\beta$  désigne un rapport de convergence pupillaire:

$$H_0 = v_0 (x_1, p_1) = n_2 f_1 v_0 \left( \frac{n_0 n_2 \gamma_1}{n_0 n_2} - \frac{n_0 n_2 (\beta_1)}{n_0 n_2} \right)$$

ou encore:

$$23) \quad H_0 = v_0 \cdot \frac{f_1 n_2}{n_0} \cdot (\beta_1 - \gamma_1)$$

Donc:

$$h_{2j-1} = n_0 \cdot \frac{v_{2j-2}}{v_0} \cdot \frac{n_{2j} f_{2j-1}}{n_2 f_1} \cdot \frac{n_{2j-2} n_{2j} \gamma_{2j-1}}{n_{2j-2} n_{2j} (\beta_1 - \gamma_1)}$$

soit:

$$24) \quad h_{2j-1} = \frac{n_0}{n_2 n_{2j-2}} \cdot \frac{f_{2j-1}}{f_1} \cdot \frac{n_{2j-2} v_{2j-2} - n_{2j} v_{2j}}{v_0 (\beta_1 - \gamma_1)}$$

Enfin, la formule la plus intéressante se déduit immédiatement de la formule (12):

$$25) \quad h_{2j-1} = -\frac{1}{H_0} \cdot \left[ \frac{n_2 v_{2j-2} - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 + \sum_{i=1}^{i=j-1} e_{2i} v_{2i} \right]$$

### 13 . CALCUL DES COEFFICIENTS k DES HAUTEURS PUPILLAIRES.

De la même manière, nous avons,

$$k_{2j-1} = -\frac{K_{2j-1}}{n_0 u_0} = -\frac{u_{2j-2} p_{2j-1}}{n_0 u_0} = -\frac{u_{2j} p'_{2j-1}}{n_0 u_0}$$

Donc:

$$26) \quad \left\{ \begin{aligned} k_{2j-1} &= \frac{1}{n_0} \cdot \frac{u_{2j-2}}{u_0} \cdot f_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} n_{2j} (\beta_{2j-1})}{n_{2j-2}}, \quad (\beta_{2j-1} = \frac{u_{2j}}{u_{2j-2}}) \\ &= \frac{1}{n_0 u_0} \cdot f_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} u_{2j-2} - n_{2j} u_{2j}}{n_{2j-2}} \end{aligned} \right.$$

### 14 . CALCUL DES INVARIANTS $\mathcal{L}_x$ ET $\mathcal{L}_p$ .

Nous avons successivement:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_x)_{2j-1} &= n_{2j-2} \left( \frac{1}{r_{2j-1}} - \frac{1}{x_{2j-1}} \right) = n_{2j} \left( \frac{1}{r_{2j-1}} - \frac{1}{x'_{2j-1}} \right) \\ &= n_{2j-2} \left[ \frac{1}{f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2}}{n_{2j-2} n_{2j}} - \frac{1}{f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2}}{n_{2j-2} n_{2j} \gamma_{2j-1}} \right] \end{aligned}$$

soit:

$$(27) \quad (2_x)_{2j-1} = \frac{1}{f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2}^2 n_{2j} (1 - \gamma_{2j-1})}{(n_{2j-2} n_{2j}) (n_{2j-2} n_{2j} \gamma_{2j-1})}$$

On obtient de même:

$$(28) \quad (2_p)_{2j-1} = \frac{1}{f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2}^2 n_{2j} (1 - \beta_{2j-1})}{(n_{2j-2} n_{2j}) (n_{2j-2} n_{2j} \beta_{2j-1})}$$

D'où la différence:

$$(2_p - 2_x)_{2j-1} = - \frac{n_{2j-2}^2 n_{2j}}{f_{2j-1}} \cdot \frac{\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1}}{(n_{2j-2} n_{2j} \beta_{2j-1}) (n_{2j-2} n_{2j} \gamma_{2j-1})}$$

## 15. VERIFICATION DE LA PREMIERE FORMULE DE SEIDEL.

Nous avons tout d'abord:

$$\begin{aligned} k_{2j-1} k_{2j+1} &= \left[ n_0 \cdot \frac{v_{2j-2}}{v_0} \cdot \frac{f_{2j-1}}{f_1} \cdot \frac{n_{2j-2} n_{2j} \gamma_{2j-1}}{n_2 n_{2j-2} (\beta_1 - \gamma_1)} \right] \times \left[ \frac{1}{n_0} \cdot \frac{u_{2j-2}}{u_0} \cdot f_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} n_{2j} \beta_{2j-1}}{n_{2j-2}} \right] \\ &= \left[ f_{2j-1} \frac{(n_{2j-2} n_{2j} \beta_{2j-1}) (n_{2j-2} n_{2j} \gamma_{2j-1})}{n_{2j-2}^2 n_{2j} (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})} \right] \times \\ &\quad \times \left[ \frac{u_{2j-2}}{u_0} \cdot \frac{v_{2j-2}}{v_0} \cdot \frac{n_{2j} f_{2j-1}}{n_2 f_1} \cdot \frac{(\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})}{(\beta_1 - \gamma_1)} \right] \end{aligned}$$

On reconnaît la quantité  $-(2_p - 2_x)_{2j-1}^{-1}$  dans le premier crochet de la deuxième ligne. Nous allons montrer que le second crochet est égal à 1. A cet effet, écrivons la relation:

$$x_1' - x_3 = p_1' - p_3 = e_2,$$

d'où l'on déduit:

$$x_1'' - p_1' = x_3 - p_3.$$

Remplaçons ses deux membres par leurs expressions données par les formules (3):

$$\begin{cases} x_1' - p_1' = \frac{1}{n_0} f_1 \cdot \left( \frac{n_0 - n_2 \gamma_1}{\gamma_1} - \frac{n_0 - n_2 \beta_1}{\beta_1} \right) = f_1 \cdot \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\beta_1 \gamma_1} \\ x_3 - p_3 = \frac{1}{n_0} f_3 \cdot \left[ (n_2 - n_4 \gamma_3) - (n_2 - n_4 \beta_3) \right] = \frac{n_4}{n_2} f_3 \cdot (\beta_3 - \gamma_3) \end{cases}$$

Par suite:

$$f_1 \cdot \frac{\beta_1 - \gamma_1}{\beta_1 \gamma_1} = \frac{n_4}{n_2} \cdot f_3 \cdot (\beta_3 - \gamma_3)$$

Nous avons successivement:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_2 f_1 (\beta_1 - \gamma_1) u_0 v_0 = n_4 f_3 (\beta_3 - \gamma_3) u_2 v_2 \\ n_4 f_3 (\beta_3 - \gamma_3) u_2 v_2 = n_6 f_5 (\beta_5 - \gamma_5) u_4 v_4 \\ \dots\dots\dots \\ n_{2j-2} f_{2j-1} (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1}) u_{2j-2} v_{2j-2} = n_{2j} f_{2j-1} (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1}) u_{2j-2} v_{2j-2} \end{array} \right.$$

Bonc, quel que soit  $j$ , nous avons:

$$(30) \quad n_{2j} f_{2j-1} (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1}) u_{2j-2} v_{2j-2} = n_2 f_1 (\beta_1 - \gamma_1) u_0 v_0 = n_0 u_0 H_0,$$

d'après (23).

Ainsi est retrouvée la première formule de Seidel. Cette démonstration nous a conduits à un nouvel invariant qui va nous permettre d'éliminer les éléments pupillaires comme nous l'avons annoncé.

## 16. ELIMINATION DES ELEMENTS PUPILLAIRES.

La formule (30) nous permet d'écrire successivement:

|                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $v_2 u_0 - v_0 u_2 = \frac{n_0 u_0 H_0}{n_2 f_1}$ $v_4 u_2 - v_2 u_4 = \frac{n_0 u_0 H_0}{n_4 f_3}$ $v_6 u_4 - v_4 u_6 = \frac{n_0 u_0 H_0}{n_6 f_5}$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $v_{2j} u_{2j-2} - v_{2j-2} u_{2j} = \frac{n_0 u_0 H_0}{n_{2j} f_{2j-1}}$ | <p style="text-align: center;">point-objet à<br/>l'infini</p> $1 = \frac{v_2 v_4}{v_2 v_4}$ $\frac{v_2}{v_6} = \frac{v_2 v_4}{v_4 v_6}$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\frac{v_2 v_4}{v_{2j-2} v_{2j}}$ | <p style="text-align: center;">point-objet à<br/>distance finie</p> $1 = \frac{v_0 v_2}{v_0 v_2}$ $\frac{v_0}{v_4} = \frac{v_0 v_2}{v_2 v_4}$ $\frac{v_0}{v_4} \times \frac{v_2}{v_6} = \frac{v_0 v_2}{v_4 v_6}$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\frac{v_0 v_2}{v_{2j-2} v_{2j}}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

En opérant sur ce système de relations comme le système (15), nous obtenons;

a) Point-objet à l'infini.

$$\begin{aligned} v_4 u_2 - \frac{v_2 v_4}{v_{2p-2} v_{2p}} v_{2p-2} u_{2p} &= \\ &= n_0 u_0 H_0 \cdot v_2 v_4 \left[ \frac{1}{n_4 f_3 v_2 v_4} + \frac{1}{n_6 f_5 v_4 v_6} + \dots + \frac{1}{n_{2p} f_{2p-1} v_{2p-2} v_{2p}} \right] \end{aligned}$$

ce qui s'écrit:

$$31) \quad \frac{u_{2p}}{v_{2p}} = \frac{u_2}{v_2} - n_o u_o H_o \cdot \sum_{j=2}^{j=p} \frac{1}{n_{2j} f_{2j-1} v_{2j-2} v_{2j}}$$

b) Point-objet à distance finie.

$$\begin{aligned} v_o u_o &= \frac{v_o v_2}{v_{2p-2} v_{2p}} \cdot v_{2p-2} u_{2p} = \\ &= n_o u_o H_o \cdot v_o v_2 \left[ \frac{1}{n_2 f_1 v_o v_2} + \frac{1}{n_2 f_2 v_2 v_{2p-2}} + \dots + \frac{1}{n_p f_{2p-1} v_{2p-2} v_{2p}} \right] \end{aligned}$$

soit:

$$32) \quad \frac{u_{2p}}{v_{2p}} = \frac{u_o}{v_o} - n_o u_o H_o \cdot \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{n_{2j} f_{2j-1} v_{2j-2} v_{2j}}$$

Cette relation peut prendre une autre forme. D'après la formule (16) on a en effet:

$$33) \quad \frac{u_{2p}}{v_{2p}} = \frac{u_o}{v_o} \left[ 1 - n_o H_o \left( \frac{1}{n_{2p} F v_{2p}} - \frac{1}{n_2 f_1 v_2} \right) \right]$$

Les éléments  $u, v$  de l'espace-objet étant connus, ces formules permettent de calculer  $u_{2j}$  en fonction seulement des focales des lentilles et des angles  $v_{2j}$  des rayons objectifs. Elles nous semblent d'ailleurs plus utilisables que la deuxième formule de Soldat démontree par Chrétien. (p.243 de son traité):

$$k_j = (P - E_j) / n_j$$

avec:

$$P = \frac{k_j}{h_j}, \quad E_j = \sum_{i=2}^{j+1} \frac{e_i}{n_i h_{i-1} h_{i+1}}$$

Elles nous permettent également, connaissant la position de l'image d'un point-objet donné à travers le système, de déterminer l'image d'un autre point objet ou encore la position d'un objet devant avoir une image donnée.

## CHAPITRE III.

## LIENS ENTRE L'OPTIQUE DE SEIDEL ET CELLE DE M. BOULOUCH.

17. GENERALITES.

La lecture des deux premiers chapitres met en évidence l'importance du rôle joué par les rapports de convergence dans le calcul d'un instrument d'optique: ils donnent lieu à tout un ensemble de formules qui permettent l'élimination immédiate des éléments intermédiaires en en donnant des expressions simples en fonction des éléments objets. Ce sont les véritables inconnues du problème, car ils définissent d'une manière unique l'astigmatisme optique qui relie l'image paraxiale à l'objet. Nous verrons, dans les chapitres suivants, que tout calcul optique conduit à déterminer le cheminement du rayon lumineux à travers l'instrument et à considérer un objectif non plus, selon la théorie classique, comme un ensemble de lentilles, ni même comme un ensemble de dioptries sphériques, mais comme un ensemble de rayons réfractés (et s'il y a lieu réfléchis s'il s'agit de systèmes catadioptriques) qui constituent une ligne brisée dont l'allure générale caractérise, pour des épaisseurs données, le type d'objectif obtenu.

Mais avant d'aborder la solution des problèmes du calcul optique, il est intéressant de chercher les liens qui existent entre les formules de Seidel et celles de M. Boulouch relatives aux aberrations du troisième ordre. Ces deux types de formules sont de structure très différentes, et nous établirons les secondes à partir des premières.

Nous ne démontrerons pas en général les formules de Seidel: nous laissons au lecteur le soin de se reporter au traité de M. Chrétien (p. 327 et suivantes, 464 et suivantes, 754 et suivantes, 891 et suivantes).

18. ABERRATION CHROMATIQUE DE POSITION.

L'aberration chromatique  $\delta x'$  de la position de l'image paraxiale est donnée par l'équation:

$$n'. \left(\frac{h'}{x'}\right)^2 \delta x' = n \left(\frac{h}{x}\right)^2 \delta x - C$$

avec:  $C_x = \sum h^2 \Delta \frac{\delta n}{n}$ , où:  $\Delta \frac{\delta n}{n} = \frac{\delta n'_x}{n} - \frac{\delta n}{n}$

$\delta n$  désignant la variation d'un milieu en fonction de la longueur d'onde de la lumière qui le traverse, et  $\Delta \frac{\delta n}{n}$  la différence des dispersions des espaces image  $\left(\frac{\delta n'_x}{n'}\right)$  et objet  $\frac{\delta n}{n}$  d'un dioptrie quelconque.

Par application directe des formules du chapitre précédent, on trouve :

$$\begin{aligned}
 (h^2 \mathcal{Q})_{x, 2j-1} &= \frac{1}{H_0^2} v_{2j-2}^2 \cdot \frac{f_{2j-1}^2}{n_{2j-2}^2 n_{2j}^2} \cdot (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1})^2 \times \\
 &\quad \times \frac{n_{2j-2}^2 n_{2j}}{f_{2j-1} (n_{2j-2} - n_{2j})} \cdot \frac{1 - \gamma_{2j-1}}{n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}} \\
 &= \frac{1}{H_0^2} v_{2j-2}^2 f_{2j-1} n_{2j} \frac{(1 - \gamma_{2j-1}) (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1})}{n_{2j-2} - n_{2j}} \cdot \left( \frac{\delta n_{2j}}{n_{2j}} - \frac{\delta n_{2j-2}}{n_{2j-2}} \right)
 \end{aligned}$$

D'où la formule :

$$34) \mathcal{C}_x = \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{H_0^2} v_{2j-2}^2 n_{2j} f_{2j-1} \cdot \frac{(1 - \gamma_{2j-1}) (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1})}{n_{2j-2} - n_{2j}} \cdot \left( \frac{\delta n_{2j}}{n_{2j}} - \frac{\delta n_{2j-2}}{n_{2j-2}} \right)$$

#### 19. - ABERRATIONS CHROMATIQUES LATÉRALE ET ANGULAIRE .

La variation chromatique relative du grandissement angulaire a pour expression :

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta x^1}{x^1 - p^1} - \frac{\delta x}{x - p} + \mathcal{C}_y, \text{ avec : } \mathcal{C}_y = \frac{\delta n}{n} - \frac{\delta n^1}{n^1} + \sum h k \mathcal{Q}_x \Delta \frac{\delta n}{n}$$

Nous avons dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 (h k \mathcal{Q})_{x, 2j-1} &= \frac{1}{H_0} v_{2j-2} \cdot \frac{f_{2j-1}}{n_{2j-2}} \cdot (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}) \times \left[ \frac{n_{2j} f_{2j-1}}{n_0} \cdot \frac{u_{2j-2}}{u_0} \cdot \frac{n_{2j-2} n_{2j} \beta_{2j-1}}{n_{2j-2} n_{2j}} \right] \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2}^2 n_{2j}}{n_{2j-2} - n_{2j}} \cdot \frac{1 - \gamma_{2j-1}}{n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 35) (h k \mathcal{Q} \Delta \frac{\delta n}{n})_{2j-1} &= \frac{1}{H_0} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \frac{u_{2j-2}}{u_0} \cdot v_{2j-2} \cdot n_{2j} \cdot f_{2j-1} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{(1 - \gamma_{2j-1}) \cdot (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1})}{n_{2j-2} - n_{2j}} \cdot \left( \Delta \frac{\delta n}{n} \right)_{2j-1}
 \end{aligned}$$

Mais :

$$H_0 = v_0 \cdot \frac{n_2}{n_0} \cdot f_1 - (\beta_1 - \gamma_1)$$

Donc:

$$\frac{u_{2j-2} v_{2j-2}}{n_0 u_0} \cdot n_{2j} \cdot f_{2j-1} = \frac{1}{n_0} \cdot \frac{u_{2j-2} v_{2j-2}}{u_0 v_0} \cdot \frac{n_{2j}}{n_2} \cdot \frac{f_{2j-1}}{f_1} \cdot \frac{n_0}{\beta_{1-} \gamma_1} = \frac{1}{(\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})}$$

en vertu de la relation d'invariance (30). Finalement:

$$\begin{aligned} \frac{\delta g}{g} &= \sum_{j=1}^{j=p} \left( \frac{\delta g}{g} \right)_{2j-1} \\ \left( \frac{\delta g}{g} \right)_{2j-1} &= \frac{\delta v_{2j}}{v_{2j}} - \frac{\delta v_{2j-2}}{v_{2j-2}} = \frac{(1 - \gamma_{2j-1})(n_{2j-2} - n_{2j})(\beta_{2j-1})}{(n_{2j-2} - n_{2j})(\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})} \cdot \left( \Delta \frac{\delta n}{n} \right)_{2j-1} + \\ &\quad + \frac{\delta x'_{2j-1}}{x'_{2j-1} - p'_{2j-1}} - \frac{\delta x_{2j-1}}{x_{2j-1} - p_{2j-1}} \end{aligned}$$

C'est la formule trouvée par M. Boulouch. Mais, dans les applications, il est préférable d'utiliser la formule (35); cette dernière est restée inconnue de l'auteur, car n'étant pas parti des formules de Seidel, il lui était impossible de découvrir les relations d'invariance (30) permettant de passer de (36) à (35).

Pour calculer l'aberration chromatique latérale, différentions l'identité de Lagrange écrite pour un dioptré quelconque:  $n y v = n' y' v'$ .

Il vient: 
$$\frac{dy}{y} - \frac{dy'}{y'} = \frac{dv'}{v'} - \frac{dv}{v}$$

Par suite: 
$$\frac{\delta y'}{y'} - \frac{\delta y}{y} = \sum_{j=1}^{j=p} \left( \frac{\delta y_{2j-2}}{y_{2j-2}} - \frac{\delta y_{2j}}{y_{2j}} \right)$$

37) 
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta y_{2j-2}}{y_{2j-2}} - \frac{\delta y_{2j}}{y_{2j}} &= \frac{(1 - \gamma_{2j-1})(n_{2j-2} - n_{2j})(\delta_{2j-1})}{(n_{2j-2} - n_{2j})(\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})} \cdot \left( \Delta \frac{\delta n}{n} \right)_{2j-1} \cdot \left( \frac{\delta x'}{x'_{2j-1} - p'_{2j-1}} - \frac{\delta x}{x_{2j-1} - p_{2j-1}} \right) \end{aligned} \right.$$

## 20. ABERRATION SPHERIQUE

Si l'on remplace  $\frac{H}{x}$  par  $(-v)$ , la formule de Seidel s'écrit:

$$n^2 v^2 \delta x' - n v^2 \delta x = -H_0^4 \mathcal{S},$$

avec:

$$\mathcal{S} = \sum h^4 \mathcal{Q}_x^2 \Delta \frac{1}{n x}$$

On a de la même manière:

$$\left(\Delta \frac{1}{n x}\right)_{2j-1} = \frac{1}{n_{2j}^f}_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} \gamma_{2j-1}}{n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}} - \frac{1}{n_{2j}^f}_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j}}{n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}}$$

$$38) \quad \left(\Delta \frac{1}{n x}\right)_{2j-1} = \frac{1}{n_{2j}^f}_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} \gamma_{2j-1}^{-n_{2j}}}{n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}}$$

Puis:

$$\begin{aligned} \left(h^4 2^2 \Delta \frac{1}{n x}\right)_{2j-1} &= \frac{1}{H_0^4} \cdot v_{2j-2}^4 n_{2j}^2 f_{2j-1}^2 \cdot \frac{(1 - \gamma_{2j-1})^2 (n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1})^2}{(n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1})^2} x \\ &\quad \times \frac{1}{n_{2j}^f}_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} \gamma_{2j-1}^{-n_{2j}}}{n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}} \end{aligned}$$

$$39) \quad \left(h^4 2^2 \Delta \frac{1}{n x}\right)_{2j-1} = \frac{1}{H_0^4} v_{2j-2}^4 \frac{n_{2j}^f}_{2j-1} \cdot$$

$$\cdot (1 - \gamma_{2j-1})^2 (n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}) (n_{2j-2} \gamma_{2j-1}^{-n_{2j}})$$

21

La variation relative du grandissement angulaire en fonction de la hauteur d'incidence est:

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta x'}{x' - p'} - \frac{\delta x}{x - p} + \frac{1}{2} H_0^2 \mathcal{B}, \quad \text{où: } \mathcal{B} = \mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1,$$

$$\text{avec: } \mathcal{B}_1 = \sum h^2 2_x \Delta \frac{1}{n x}, \quad \mathcal{B}_2 = \sum h^3 k 2_x^2 \Delta \frac{1}{n x}.$$

$$\mathcal{B} = \sum h^2 2_x (h k 2_x - 1) \Delta \frac{1}{n x}.$$

$$\left[ h^2 2_x (h k 2_x - 1) \Delta \frac{1}{n x} \right]_{2j-1} = \frac{1}{H_0^2} v_{2j-2}^2 n_{2j}^f f_{2j-1} \cdot \frac{(1 - \gamma_{2j-1}) (n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1})}{n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}} x$$

$$\times \frac{(\beta_{2j-1} - 1) (n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1})}{(\gamma_{2j-1} - \beta_{2j-1}) (n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1})} \times \frac{1}{n_{2j}^f}_{2j-1} \cdot \frac{n_{2j-2} \gamma_{2j-1}^{-n_{2j}}}{n_{2j-2}^{-n} \gamma_{2j-1}} =$$

$$= \frac{\frac{v_{2j-2}^2}{H_0^2} (\beta_{2j-1}-1)(\gamma_{2j-1}-1)(n_{2j-2}-n_{2j})\gamma_{2j-1}(n_{2j-2}\gamma_{2j-1}-n_{2j})}{(n_{2j-2}-n_{2j})(\beta_{2j-1}-\gamma_{2j-1})}$$

Mais, d'après (30):

$$\beta_{2j-1}-\gamma_{2j-1} = \frac{H_0 n_0 u_0}{n_{2j}^f f_{2j-1} u_{2j-2}^v v_{2j-2}}$$

Par suite:

$$40) \left[ h^2 \mathcal{L}_x (h k \mathcal{L}_x - 1) \Delta \frac{1}{n x} \right]_{2j-1} = \frac{u_{2j-2}^2 v_{2j-2}^2}{n_0 u_0 H_0^3} \cdot \frac{n_{2j} f_{2j-1}}{(n_{2j-2}-n_{2j})^2} \cdot (\beta_{2j-1}-1)(\gamma_{2j-1}-1)(n_{2j-2}-n_{2j})\gamma_{2j-1}(n_{2j-2}\gamma_{2j-1}-n_{2j})$$

## 22. ASTIGMATISME ET COURBURE DE CHAMP.

Si  $R_s, R_t, R_s^0, R_t^0$  sont les rayons de courbure des focales sagittales et tangentielles objets et images, on a les formules:

$$\begin{cases} \frac{1}{n^0 R_s^0} = \frac{1}{n R_s} + \mathcal{P} - \mathcal{K} \\ \frac{1}{n^0 R_t^0} = \frac{1}{n R_t} + \mathcal{P} - \mathcal{A} \end{cases}$$

avec:

$$\begin{cases} \mathcal{K} = \sum \left[ h^2 k^2 \mathcal{L}_x^2 \Delta \frac{1}{n x} - 2 h k \mathcal{L}_x \Delta \frac{1}{n x} + \Delta \frac{1}{n x} \right] - (h k \mathcal{L}_x - 1)^2 \Delta \frac{1}{n x} \\ \mathcal{P} = \sum \frac{1}{r} \Delta \frac{1}{n} \end{cases}$$

$\mathcal{C} = \mathcal{P} - 2 \mathcal{K}$  est la courbure de champ.

$$\left[ (h k \mathcal{L}_x - 1)^2 \Delta \frac{1}{n x} \right]_{2j-1} = \frac{(\beta_{2j-1}-1)^2 (n_{2j-2}-n_{2j}) \gamma_{2j-1}^2}{(\gamma_{2j-1} - (\beta_{2j-1})^2 (n_{2j-2}-n_{2j}))^2} \cdot x \cdot \frac{1}{n_{2j}^f f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2} \gamma_{2j-1} - n_{2j}}{n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}}$$

$$41) \left[ (h k \mathcal{L}_x - 1)^2 \Delta \frac{1}{n x} \right]_{2j-1} = \frac{u_{2j-2}^2 v_{2j-2}^2}{n_0^2 H_0^2 v_0^2} \cdot \frac{n_{2j} f_{2j-1}}{(n_{2j-2}-n_{2j})^2}$$

$$\cdot (\beta_{2j-1} - 1)^2 (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}) (n_{2j-2} \gamma_{2j-1} - n_{2j})$$

Enfin, on trouve aisément:

$$42) \quad \mathcal{P} = \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{n_{2j}^2 f_{2j-1}}$$

### 23. DISTORSION.

La variation relative du grandissement angulaire en fonction de l'inclinaison du rayon pupillaire a pour expression:

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta p}{x-p} - \frac{\delta x'}{x'-p'} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{n_o y_o}{x_1 - p_1} \right)^2 \mathcal{D}$$

Avec:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \sum (h k^3 \mathcal{L}_p^3 \Delta \frac{1}{n p} - k^2 \mathcal{L}_p \cdot \frac{1}{r} \cdot \Delta \frac{1}{n} \\ &= \sum (h k^3 \mathcal{L}_p^2 \Delta \frac{1}{n x} - k^2 \mathcal{L}_p \Delta \frac{1}{n p}) \end{aligned}$$

En partant de la première formule, nous avons:

$$\begin{aligned} h k^3 \mathcal{L}_p^2 \Delta \frac{1}{n p} - k^2 \mathcal{L}_p \frac{1}{r} \cdot \Delta \frac{1}{n} &= k^2 \mathcal{L}_p \left[ - \frac{\mathcal{L}_p}{\mathcal{L}_p - \mathcal{L}_x} \cdot \frac{1}{n p} - \frac{1}{r} \Delta \frac{1}{n} \right] = \\ &= \frac{1}{n_o^2} \cdot \frac{u_{2j-2}^2}{u_o^2} \cdot n_{2j}^2 f_{2j-1} \cdot \frac{(n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1})^2}{n_{2j-2}^2 n_{2j}^2} \times \frac{n_{2j-2}^2 n_{2j}^2}{f_{2j-1}} \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{1 - \beta_{2j-1}}{(n_{2j-2} - n_{2j}) (n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1})} x$$

$$\times \left[ \frac{(1 - \beta_{2j-1}) (n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1})}{(n_{2j-2} - n_{2j}) (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})} \cdot \frac{1}{n_{2j}^2 f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2} \beta_{2j-1} - n_{2j}}{n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1}} - \frac{1}{n_{2j}^2 f_{2j-1}} \right]$$

$$43) \quad \left[ \mathcal{D} = \sum_{j=1}^{j=p} \frac{1}{n_o^2} \cdot \frac{u_{2j-2}^2}{u_o^2} \cdot \frac{1 - \beta_{2j-1}}{(n_{2j-2} - n_{2j})^2 (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})} \cdot D_1 \right]$$

$$43) \left\{ \begin{aligned} D_1 &= (1 - \beta_{2j-1})(n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1})(n_{2j-2} \beta_{2j-1} - n_{2j}) - \\ &\quad - (n_{2j-2} - n_{2j})(\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})(n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1}) \end{aligned} \right.$$

En partant de la deuxième formule, nous avons de même:

$$\begin{aligned} & n^2 \Delta \frac{1}{p \ n \ x} - n^2 \Delta \frac{1}{p \ n \ p} - n^2 \Delta \left( - \frac{2_p}{2_p - 2_x} \cdot \Delta \frac{1}{n \ x} - \Delta \frac{1}{n \ p} \right) = \\ &= \frac{1}{n_o^2} - \frac{u_{2j-2}^2}{u_o^2} n_{2j} f_{2j-1} \cdot \frac{(1 - \beta_{2j-1})(n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1})}{n_{2j-2} - n_{2j}} x \\ &= \frac{1 - \beta_{2j-1}}{n_{2j-2} - n_{2j}} \cdot \frac{n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}}{\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1}} x \cdot \frac{1}{n_{2j} f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2} \gamma_{2j-1} - n_{2j}}{n_{2j-2} - n_{2j} \gamma_{2j-1}} - \\ &\quad - \frac{1}{n_{2j} f_{2j-1}} \cdot \frac{n_{2j-2} \beta_{2j-1} - n_{2j}}{n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1}} \\ 44) \left\{ \begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{n_o^2} \cdot \frac{u_{2j-2}^2}{u_o^2} \cdot \frac{1 - \beta_{2j-1}}{(n_{2j-2} - n_{2j})^2 (\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1})} D_2 \\ D_2 &= (1 - \beta_{2j-1})(n_{2j-2} - n_{2j} \beta_{2j-1})(n_{2j-2} \gamma_{2j-1} - n_{2j}) - \\ &\quad - (n_{2j-2} - n_{2j})(n_{2j-2} \beta_{2j-1} - n_{2j})(\beta_{2j-1} - \gamma_{2j-1}) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Or, on doit avoir:  $D_1 = D_2$ , donc, en utilisant des notations plus légères:

$$D = (1 - \beta)(n - n^0 \beta)(n \beta - n^0) - (n - n^0)(\beta - \gamma)(n - n^0 \beta)$$

$$D = (1 - \beta)(n - n^0 \beta)(n \gamma - n^0) - (n - n^0)(\beta - \gamma)(n \beta - n^0)$$

On vérifie aisément que ces deux expressions sont égales en les développant par rapport à  $\beta$  et  $\gamma$ .

#### 24. REMARQUE.

Les formules qui viennent d'être établies diffèrent légèrement des

formules trouvées par M. Boulouch dans sa thèse (p.39 et suivantes, pour les aberrations chromatiques, p.80 et suivantes pour les autres aberrations): pour retrouver ces dernières, il faut d'abord poser:

$$n_{2j} f_{2j-1} = k_{2j-1}$$

et remplacer  $\beta$  par  $\gamma_0$ .

D'autre part, l'auteur s'est borné à calculer des fonctions d'aberrations destinées à être annulées dans un calcul d'objectif; ces formules ne renseignent nullement sur la valeur des aberrations du troisième ordre lorsque les fonctions qui les expriment ne sont pas nulles; les calculs que nous venons de faire lèvent cette imprécision.

## 25. - CONCLUSION.

Les différentes formules exprimant les aberrations en fonctions rationnelles des rapports de convergence sont d'une forme algébrique élégante et semblent plus maniables que les équations de Seidel pour un calcul limité au troisième ordre. Elles présentent cependant le même inconvénient que ces dernières, celui de ne fournir qu'une solution approchée du problème. Elles ne donnent par ailleurs aucune indication sur les aberrations produites par les rayons extra-méridiens. Bien qu'elles puissent avoir un certain intérêt pour des recherches théoriques, nous ne les introduirons pas en général dans les systèmes d'équations auxquels nous conduit la méthode de calcul que nous proposons. Nous retiendrons seulement les avantages que laissent apparaître les rapports de convergence, et nous utiliserons, dans les chapitres suivants, les formules paraxiales des chapitres I et II sous des formes plus commodes en vue de la résolution mécanique du problème le plus général du calcul des combinaisons optiques.

---

## Chapitre IV.

## RESOLUTION DU SYSTEME DES EQUATIONS AUX ABERRATIONS.

## 26. PRINCIPLE DE LA METHODE.

Les résultats obtenus dans les précédents chapitres n'ont un intérêt pratique que dans la mesure où l'on pourra résoudre un système de  $n$  équations algébriques ou transcendentes à  $n$  inconnues.

La solution que nous proposerons est une généralisation de la méthode de Newton établie pour une équation à une inconnue.

Soit  $y = f(x) = 0$  l'équation à résoudre.

Soient  $M_0 (x_0, y_0)$  un point de la courbe

voisin du point A où celle-ci coupe l'axe Ox. La méthode de Newton consiste à substituer au point A le point P où la tangente en  $M_0$  à la courbe coupe Ox. Cette tangente a pour équation:

$$Y (y_0 = y'_0 (X - x_0) ,$$

(X,Y) étant des coordonnées courantes et  $y'_0$  la valeur de la dérivée de  $f(x)$  en  $M_0$ .

L'abscisse du point P est donc:

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{y'_0} .$$

On peut encore écrire:

$$y_0 + y'_0 (x_1 - x_0) = 0$$

C'est également la formule de Taylor limitée au terme du premier ordre.

En réitérant la méthode autant de fois qu'il est nécessaire, on peut ainsi calculer la racine cherchée avec toute la précision désirable.

Soit maintenant un système de  $n$  équations quelconques à  $n$  inconnues:

$$45) \quad y_i = f_i (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

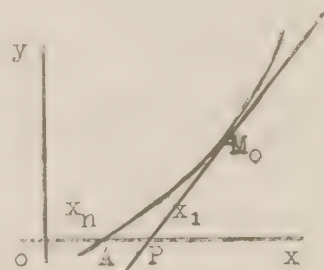


Fig. 4

ou plus brièvement:

$$y_i = f_i(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Soit  $(x_j)_0$  un système de  $n$  valeurs initiales des inconnues  $x_j$ , voisines du système des solutions cherchées.

La formule de Taylor appliquée aux équations données et limitée aux termes du premier ordre conduit au système suivant linéaire en

$$\Delta x_j = (x_j)_1 - (x_j)_0 :$$

$$46) \quad (y_i)_0 + \sum_{j=1}^{j=n} \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j = 0$$

Géométriquement, dans un espace à  $n + 1$  dimensions, chacune des équations (45) représente une multiplicité à  $n$  dimensions que, par commodité de langage, nous appellerons encore une surface, et l'équation (46) qui lui correspond définit une autre multiplicité à  $n$  dimensions, qui sera le plan tangent à la surface considérée au point  $(M_i)_0$  de coordonnées  $(x_j, y_i)_0$ .

Ainsi, les valeurs  $(x_j)_1$  obtenues sont donc  $n$  coordonnées  $x_j$  d'un point d'ordonnée  $y = 0$ : ce point se trouve défini comme l'intersection  $P$  du plan de coordonnées,  $y = 0$ , de multiplicité  $n$ , et des  $n$  plans tangents (46).

## 27. CHOIX D'UN SYSTEME DE SOLUTIONS DE DEPART.

Pour une hauteur d'incidence donnée, l'angle du rayon émergent avec l'axe s'écarte peu, en général, d'une valeur moyenne pour une série d'objectifs de type bien défini. Il en résulte qu'il est intéressant de prendre pour inconnues, non pas les angles des rayons réfractés avec l'axe, mais plutôt les rapports de ces angles avec l'angle du rayon émergent.

Ainsi, pour calculer un triplet dont la lentille médiane est bi-concave, on pourra partir du système de valeurs:

$$\frac{v_2}{v_{12}} = 0,5 \quad ; \quad \frac{v_4}{v_{12}} = 1,5 \quad ; \quad \frac{v_6}{v_{12}} = 0,5 \quad ; \quad \frac{v_8}{v_{12}} = -0,3 \quad ; \quad \frac{v_{10}}{v_{12}} = 0,1 .$$

## 28. METHODE PRATIQUE.

a) Nous sommes ainsi conduits à prendre pour inconnues les rapports définis au par. 27 et les épaisseurs. Nous verrons que ce système de variables suffit à déterminer l'objectif



b) Le choix du système de départ étant fait, les différentes aberrations peuvent alors

Fig. 5

être calculées ainsi que leurs dérivées partielles par rapport aux variables choisies: ce sont les coefficients d'un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les quantités  $\Delta x_j$  dont il faudra modifier les variables.

On calculera d'abord les dérivées des rayons de courbure et des épaisseurs par rapport aux variables adoptées, puis les dérivées des aberrations par rapport aux rayons de courbure et aux épaisseurs.

## 29 . EXPRESSION DEFINITIVE DES RAYONS DE COURBURE.

a) L'objet est à l'infini.

On admettra dans ce cas, que la focale totale du système est toujours imposée par l'avant-projet. On sait que l'on a:

$$\frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 = \frac{n_2}{n_0} \cdot v_2 \cdot f_1 = - \frac{n'}{n_0} \cdot v' F_1$$

où  $n'$  et  $v'$  désignent les quantités  $n_{2p}$  et  $v_{2p}$  relatives à l'espace-image.

Ainsi, l'expression (20) du rayon de courbure trouvée p.l.:

$$r_{2j-1} = - \frac{n_{2j} - n_{2j-2}}{n_{2j} v_{2j} - n_{2j-2} v_{2j-2}} \cdot \left[ \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 + \sum_{i=1}^{j-1} e_{2i} v_{2i} \right]$$

devient:

$$47) \quad r_{2j-1} = (n_{2j} - n_{2j-2}) \cdot \frac{\Gamma_{2j-1}}{\Delta_{2j-1}}$$

où l'on a posé:

$$48) \quad \begin{cases} \Gamma' = -F, & z_{2j} = \frac{v_{2j}}{v_{2p}} = \frac{v_{2j}}{v'} \\ \Gamma_{2j-1} = F' - \sum_{i=1}^{j-1} e_{2i} z_{2i}, & \Delta_{2j-1} = n_{2j} z_{2j} - n_{2j-2} z_{2j-2} \end{cases}$$

D'après les formules (19), l'abscisse de l'image par rapport au dioptré de sortie est:

$$49) \quad x' = \Gamma_{2j-1}$$

b) L'objet est à une distance finie  $x_1$  du dioptré d'entrée.

Nous supposons  $x_1$  connu. D'après (3):

$$x_1 = - \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0 v_0} \cdot f_1, \quad \text{ou:} \quad \frac{n_2 v_2 - n_0 v_0}{n_0} \cdot f_1 = - x_1 v_0.$$

Nous pouvons donc écrire de même:

$$50) \quad r_{2j-1} = (n_{2j}^{-n_{2j-2}}) \cdot \frac{\Gamma_{2j-1}}{\Delta_{2j-1}}$$

où l'on a:

$$51) \quad \Gamma_{2j-1} = x_1 z_0 - \sum_{i=1}^{i=j-1} e_{2i} z_{2i} \quad , \quad \Delta_{2j-1} = n_{2j} z_{2j}^{-n_{2j-2} z_{2j-2}}$$

Ici encore:

$$x^1 = \Gamma_{2p-1}$$

### 30 . DERIVEES DES RAYONS DE COURBURE.

a) Par rapport aux rapports de convergence  $z$  .

$$52) \quad \frac{1}{r_{2j-1}} \cdot \frac{\partial r_{2j-1}}{\partial z_{2k}} = \frac{1}{\Gamma_{2j-1}} \cdot \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial z_{2k}} - \frac{1}{\Delta_{2j-1}} \cdot \frac{\partial (n_{2j} z_{2j}^{-n_{2j-2} z_{2j-2}})}{\partial z_{2k}}$$

où l'on a:

$$53) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial z_0} = x_1 & \text{si l'objet est à distance finie.} \\ \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial z_{2k}} = -e_{2k} & \text{si } 1 \leq k \leq j \\ \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial z_{2k}} = 0 & \text{si } k > j \end{array} \right.$$

b) Par rapport aux épaisseurs  $e$  .

$$54) \quad \frac{1}{r_{2j-1}} \cdot \frac{\partial r_{2j-1}}{\partial e_{2k}} = \frac{1}{\Gamma_{2j-1}} \cdot \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial e_{2k}}$$

où l'on a de même:

$$55) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial e_{2k}} = -z_{2k} & \text{si } 1 \leq k \leq j \\ \frac{\partial \Gamma_{2j-1}}{\partial e_{2k}} = 0 & \text{si } k = 0 \text{ ou } k > j \end{array} \right.$$

La simplicité de ces formules nous permettra de calculer les aberrations et leurs dérivées en utilisant uniquement les marches classiques paraxiales, marginales et d'astigmatisme.

## CHAPITRE V.

### CALCUL DES ABERRATIONS ET DE LEURS DERIVEES

#### 31. - GÉNÉRALITÉS

Nous avons indiqué (par. 28;b) la méthode pratique de résolution du système des équations posées. Ces équations n'apparaîtront jamais sous une forme analytique explicite. Nous les définirons en écrivant que les aberrations, calculées pour des rayons isolés judicieusement choisis, doivent avoir des valeurs nulles ou très faibles. Dans la méthode de Newton, il suffit de calculer de proche en proche les aberrations et leurs dérivées afin de former la matrice du système d'équations linéaires (46). Nous nous bornerons ci-dessous à donner les expressions analytiques des différents types d'aberrations habituellement envisagées ainsi que les expressions de leurs différentielles. Les équations effectivement introduites dans le problème posé peuvent s'écrire symboliquement:

$$a A + b B + \dots + l L = \xi$$

où A, B, ..., L sont les différentes aberrations considérées (ou une aberration d'un seul type pour différents rayons lumineux), a, b, ..., l des coefficients numériques dont certains peuvent être nuls, et  $\xi$  la correction à imposer à la valeur du premier membre.

On pourra corriger la coma d'un système entaché d'aberration sphérique, par superposition de cette aberration et de l'écart sur la condition des sinus.

La courbure de champ sera réduite si l'on exprime que la moyenne arithmétique des aberrations sagittale et tangentielle est nulle.

On réalisera la correction chromatique en calculant les abscisses des images de deux radiations différentes et leurs dérivées; on l'obtiendra par simple différence.

Par ailleurs, le calcul numérique d'une expression algébrique ou d'un ensemble d'expressions algébriques devant être organisé en fonction des moyens mécaniques utilisés, nous nous bornerons à donner aux formules obtenues une forme analytique qui paraît se prêter au mieux à un calcul effectué à l'aide d'une machine de type courant, sans justifier à chaque instant la transformation adoptée.

Nous ferons par ailleurs une remarque, importante du point de vue du calcul mécanique, concernant la forme définitive à donner aux expressions des différentielles des aberrations. Nous allons avoir à calculer les dérivées des différentes aberrations par rapport aux variables choisies, ces aberrations étant des fonctions composées de ces variables par l'intermédiaire des rayons de courbure  $r$  et des épaisseurs  $e$ . Pour l'aberration sphérique par exemple, nous aurons à calculer, pour chaque dioptre, les dérivées de  $\alpha'$  et  $x'$  en fonction des dérivées du rayon de courbure  $r$  et de celle des grandeurs  $\alpha''$  et  $x''$  relations au dioptre précédent, en différenciant les formules:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin i = \frac{r-x}{r} \sin \alpha \\ \sin i' = \frac{n}{n'} \cdot \sin i \\ \alpha' = \alpha + i' - i \\ x' = r - r \cdot \frac{\sin i'}{\sin \alpha'} \end{array} \right.$$

Il semble que, si l'on calcule successivement les dérivées de  $i, i', \alpha', x'$ , les calculs soient relativement rapides puisque les coefficients des différentielles de ces quantités ont des expressions algébriques simples. Or, le nombre des opérations arithmétiques nécessaires est notablement diminué si l'on exprime algébriquement les différentielles de  $\alpha'$  et  $x'$  en fonctions linéaires de celles de  $\alpha, x$  et  $r$ , et cela bien que ces différentielles aient des coefficients de structure plus compliquée. Nous appliquerons cette remarque à toutes les aberrations.

Notons ici un cas particulier d'un phénomène général en calcul mécanique: la simplicité apparente d'une formule algébrique peut donner lieu à des calculs numériques longs et pénibles, alors que la même formule transformée en une autre algébriquement plus complexe facilitera et réduira, parfois dans de fortes proportions, la tâche du calculateur.

Avant de passer aux applications, précisons deux points de détail:

a) Les calculs s'effectuant pour chaque dioptre séparément, il nous paraît superflu de conserver les indices  $j$  et  $p$  utilisés dans les chapitres précédents. Il nous suffira d'affecter d'accents les lettres désignant les éléments de l'espace-image, de l'indice + 2 les éléments du dioptre suivant et de l'indice +1 ceux de l'espace intermédiaire. C'est ainsi que la formule de passage:

$$x_{2j-1} = x'_{2j-1} - e_{2j}$$

s'écrit, en notations allégées:

$$x_{+2} = x' - e_{+1}$$

b) Dans les calculs d'astigmatisme, nous introduirons les lettres  $j$  et  $p$  qui ont déjà servi comme indices: aucune confusion n'étant possible, nous conserverons le système de notations familières aux ingénieurs opticiens; d'ailleurs on retrouve dans le traité de M. Chrétien ce double rôle des lettres  $j$  et  $k$ .

## 32 . ABERRATION CHROMATIQUE DE POSITION.

Nous avons vu que l'abscisse de l'image final était:

$$x'_A = \Gamma_{2p-1},$$

calculée pour la radiation A choisie pour le calcul des aberrations géométriques et de leurs dérivées. Le chromatisme du système sera déterminé par les abscisses  $x'_B$ ,  $x'_C$  des images données par deux autres radiations

B et C au moyen des marches paraxiales classiques définies par les formules écrites pour chaque dioptre:

$$56) \quad \frac{n'}{x'} = \frac{n}{x} + \frac{n' - n}{r}$$

$$x_{+2}' = x' - e_{+1}$$

qui deviennent par différentiation:

$$\frac{n'}{x'} \cdot \frac{dx'}{x'} - \frac{n}{x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{n' - n}{r} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$dx_{+2}' = dx' - de_{+1}$$

ce qui s'écrit:

$$57) \quad dx' = \frac{n}{n'} \cdot \frac{x'^2}{x^2} \cdot dx + \frac{n' - n}{r} \cdot \frac{x'}{\left(\frac{n'}{x'}\right)} \cdot \frac{dr}{r}$$

$$dx_{+2}' = dx' - de_{+1}$$

### 33. ABERRATION CHROMATIQUE DE GRANDEUR.

a) L'objet est à distance finie.

Pour un dioptre quelconque, le grandissement transversal dans le domaine paraxial a pour expression:

$$g = \frac{n}{n'} \cdot \frac{x'}{x}$$

Le grandissement du système total est donc:

$$58) \quad g = \frac{n_0}{n'} \cdot x \cdot \frac{x'_1}{x_1} \cdot \frac{x'_3}{x_3} \cdot x \dots x \cdot \frac{x'_{2j-1}}{x_{2j-1}}$$

Pour la radiation A, on a:

$$\frac{x'_{2j-1}}{x_{2j-1}} = \frac{v_{2j-2}}{v_{2j}} = \frac{z_{2j-2}}{z_{2j}}, \quad z_{2p} = 1$$

par suite:

$$g_A = \frac{n_0}{n'} \cdot x \cdot \frac{z_0}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_4} \cdot x \dots = \frac{n_0}{n'} \cdot z_0$$

Nous définirons l'aberration chromatique de grandeur par la différence  $g_B - g_A$ ,  $g_B$  étant calculée par la formule (58). Sa dérivée a

pour expression:

$$59) \quad dg_B - dg_A = \left( \varepsilon_B - \varepsilon_A + \frac{n_0}{n'} \right) = \left[ \sum_{j=1}^{j=p} \left( \frac{dx'_j}{x'_j} - \frac{dx_j}{x_j} \right)_{2j-1} \right]_B - dz_0$$

b) l'objet est l'infini.

La formule (58) n'est plus applicable; on peut cependant l'utiliser pour le système optique qui suit le premier dioptr.

Soient  $a, a' = y'_A$ ,  $b, b' = y'_B$  les images, pour les raies A et B, données par le premier dioptr. a et b sont les foyers de ce dioptr, et les points a' et b' sont alignés avec le centre C du dioptr. Dans ces conditions, nous avons:

$$\frac{y'_B}{y'_A} = \frac{\overline{Cb}}{\overline{Ca}} = \frac{f'_B - r}{f'_A - r} = \frac{\left( \frac{n'}{n'-n} \right)_B \cdot r - r}{\left( \frac{n'}{n'-n} \right)_A \cdot r - r} = \frac{n'_A - 1}{n'_B - 1}$$

puisque:  $n_A = n_B = 1$

Si on désigne par

$Y'_A$  et  $Y'_B$

les images définitives et par  $g_A$  et  $g_B$

les grandissements entre les images  $y'$

et  $Y$ , on a, en prenant;  $n_0 = n' = 1$ :

$$60) \quad \frac{Y'_B}{Y'_A} = \frac{y'_B}{y'_A} \cdot \frac{g_B}{g_A} = \frac{(n_2-1)_A}{(n_2-1)_B} \cdot \frac{1}{z_2} \cdot (n_2 \cdot \frac{x'_3}{x_3} \cdot \frac{x'_5}{x_5} \times \dots \times \frac{x'_{2p-1}}{x_{2p-1}})_B$$

$$61) \quad \frac{dY'_B}{Y'_B} - \frac{dY'_A}{Y'_A} = \sum_{j=2}^{j=p} \left[ \left( \frac{dx'_j}{x'_j} - \frac{dx_j}{x_j} \right)_{2j-1} \right]_B - \frac{dz_2}{z_2}$$

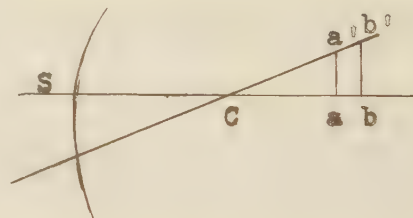


Fig. 6

### 34. ABERRATION SPHERIQUE.

a) Calcul de la fonction.

On utilise les formules habituelles suivantes valables pour chaque dioptr:

$$62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin i = \frac{r-x}{r} \sin \alpha \\ \sin i' = \frac{n}{n'} \sin i \\ \alpha' = \alpha + i' - i \\ x' = r - r x \frac{\sin i'}{\sin i} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_{+2} = x' - e_{+1} \end{array}$$

où  $i, i'$  sont les angles d'incidence et de réfraction,  $\alpha, \alpha'$  les angles avec l'axe, des rayons incidents et réfractés.

Si  $x_0'$  est l'abscisse de l'image paraxiale et  $x_M'$  celle de l'image donnée par un rayon incident marginal, l'aberration sphérique a pour expression:

$$63) \quad \Delta x' = x_M' - x_0' = x_M' - r_{2p-1}$$

b) Calcul de la dérivée.

La première équation (62) donne:

$$\begin{aligned} \cotg i \, di &= \frac{dr-dx}{r-x} - \frac{dr}{r} + \cotg \alpha \, d\alpha \\ &= \frac{x}{r-x} \cdot \frac{dr}{r} - \frac{1}{r-x} \cdot dx + \cotg \alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

Soit  $\sigma$  cette expression. D'après la deuxième équation:

$$\cotg i' \, di' = \cotg i \, di = \sigma$$

$$\text{D'où} \quad di = \sigma \, \text{tg } i, \quad di' = \sigma \, \text{tg } i'$$

$$\text{D'autre part:} \quad d\alpha' = d\alpha + di' - di = d\alpha + \sigma (\text{tg } i' - \text{tg } i)$$

$$\text{Donc:} \quad d\alpha' = d\alpha + (\text{tg } i' - \text{tg } i) \cdot \left[ \frac{x}{r-x} \cdot \frac{dr}{r} - \frac{1}{r-x} \cdot dx + \cotg \alpha \, d\alpha \right]$$

$$64) \quad d\alpha' = \left[ 1 + (\text{tg } i' - \text{tg } i) \cotg \alpha \right] d\alpha - (\text{tg } i' - \text{tg } i) \frac{dx}{r-x} + \frac{\text{tg } i' - \text{tg } i}{r-x} \cdot x \cdot \frac{dr}{r}$$

Enfin, la quatrième équation permet d'écrire:

$$dx' = \left( 1 - \frac{\sin i'}{\sin \alpha'} \right) dr - r \left[ \frac{\cos i' di'}{\sin \alpha'} - \sin i' \cdot \frac{\cos \alpha' d\alpha'}{\sin^2 \alpha'} \right]$$

$$\begin{aligned}
 dx &= x' \frac{dr}{r} - r \cdot \frac{\sin i'}{\sin \alpha'} \cdot \cotg i' di' + r \frac{\sin i'}{\sin \alpha'} \cdot \cotg \alpha' d\alpha' \\
 &= x' \frac{dr}{r} + (r - x') (\cotg \alpha' d\alpha' - \sigma)
 \end{aligned}$$

Toute réduction faite:

$$(65) \quad dx' = \left[ x' - \frac{r-x'}{r-x} \cdot x \right] \frac{dr}{r} + \frac{r-x'}{r-x} dx + (r-x') [\cotg \alpha' d\alpha' - \cotg \alpha d\alpha]$$

Il faut adjoindre aux formules (64) et (65) les deux formules de passage suivantes:

$$dx_{+2} = dx' - de_{+1}, \quad d\alpha_{+2} = d\alpha'$$

Le calcul numérique est plus rapide si, dans (65), on remplace  $d\alpha'$  par son expression (64).

En posant:  $r - x' = A$ ,  $-\tg i + \tg i' = B$ ,  $A(1 - B \cotg \alpha') = \xi$ ,  
on obtient:

$$\begin{cases} d\alpha' = L_1 d\alpha + L_2 dx + L_3 \frac{dr}{r} \\ dx' = M_1 d\alpha + M_2 dx + M_3 \frac{dr}{r} \end{cases}$$

66) où l'on a:

$$\begin{cases} L_1 = B \cotg \alpha + 1 & M_1 = -\xi \cotg \alpha + A \cotg \alpha' \\ L_2 = -\frac{1}{r-x} \cdot B & M_2 = \frac{1}{r-x} \cdot \xi \\ L_3 = \frac{x}{r-x} \cdot B & M_3 = -\frac{x}{r-x} \cdot \xi + x' \end{cases}$$

formules relatives à chaque dioptré.

### 35. COMA.

La coma est définie par la variation relative du grandissement quand on passe du domaine paraxial à la zone d'ouverture H.

$$B = \frac{\sum \varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_H - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}$$

a) Si l'objet est à distance finie:

$$\varepsilon_0 = \frac{n_0}{n'} \cdot z_0, \quad \varepsilon_H = \frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'}$$

$$(67) \quad B = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} - 1,$$

formules relatives à l'ensemble du système.

$$(68) \quad d\varepsilon = \frac{1}{z_0^2} \cdot \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \cdot d\varepsilon_0 - \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\sin \alpha' \cos \alpha'}{\sin^2 \alpha'} d\alpha' - \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha'} d\alpha$$

68) L'objet est à l'infini.  
La coma est définie par la variation de la focale aplanétique:

$$F^0 = \frac{H}{\sin \alpha}$$

Finalement, nous chercherons à annuler la quantité:

$$69) \quad \mathcal{B} = H + F^0 \sin \alpha^0$$

dont la dérivée est:

$$70) \quad d\mathcal{B} = F^0 \cos \alpha^0 d\alpha^0$$

La correction de la coma n'exige aucun schéma de calcul supplémentaire, puisque  $\sin \alpha^0$  et  $d\alpha^0$  ont été calculés en même temps que l'aberration.

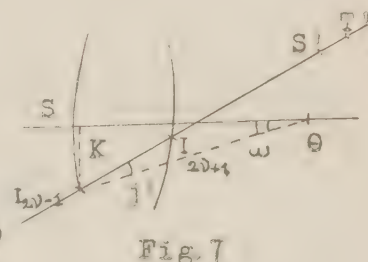
### 36. ASTIGMATISME ET COURBURE DE CHAMP.

Les formules classiques qui relient les focales sagittale et tangentielle  $t^0$  aux focales objet  $s$  et  $t$  sont, pour chaque dioptre:

$$71) \quad \begin{cases} \frac{n^0}{s^0} - \frac{n}{s} = \frac{n^0 \cos j^0 - n \cos j}{r} \\ \frac{n^0 \cos^2 j^0}{t^0} - \frac{n \cos^2 j}{t} = \frac{n^0 \cos j^0 - n \cos j}{r} \end{cases}$$

A ces formules, il faut ajouter celles qui permettent de passer d'un dioptre au suivant et qui sont:

$$72) \quad \begin{cases} \omega = \theta - j = \theta^0 - j^0 & K = r \sin \omega \\ \epsilon_{2\nu} = \frac{I_{2\nu+1} - I_{2\nu-1}}{\sin \epsilon_{2\nu+1}} \\ I_{2\nu+1} - I_{2\nu-1} = \epsilon_{2\nu} & I_{2\nu+1} - I_{2\nu-1} = \epsilon_{2\nu} \end{cases}$$



On a posé:

$$\overline{Is} = s, \overline{It} = t, \overline{Is^0} = s^0, \overline{It^0} = t^0, \overline{SI} = K, \epsilon_{2\nu} = \overline{I_{2\nu-1} I_{2\nu+1}}, \omega = (\hat{Cs}, \hat{CI}).$$

Ces formules sont d'un emploi mal aisé, à cause de la forme même des expressions (71) et de l'introduction des grandeurs  $K$  et  $\epsilon$ . Cet inconvénient se fait surtout sentir dans le calcul des dérivées. Les calculs numériques sont sensiblement plus rapides par application des formules proposées par Max Lange et exposées dans le traité de L. Chrétien (p. 746 et suivantes). Il nous paraît utile de les rétablir ici brièvement; nous supposons connus les éléments de la marche du rayon pupillaire:

$$p, p^0, j, j^0, \theta, \theta^0, \omega;$$

Ils satisfont aux relations (62) et (66) où ils sont substitués respecti-

tivement à  $x, x', i, i', \alpha, \alpha', \xi$ . Nous conserverons les lettres A, B, L, M.

a) Calcul de la focale sagittale.

Les images sagittales conjuguées  $S, S'$  étant alignées avec le centre C du dioptré sphérique, leurs ordonnées sont liées par la relation:

$$\frac{CX}{J} = \frac{CX'}{J'}$$

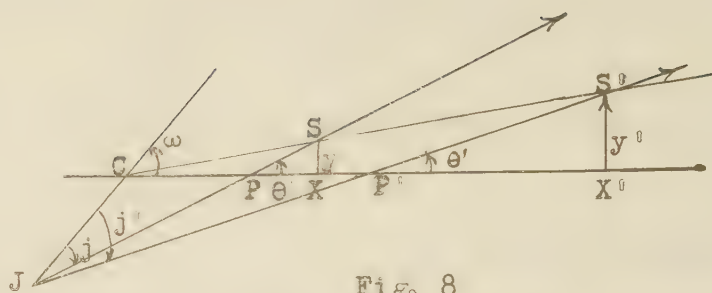


Fig. 8

D'autre part:

$$\overline{CX} = \overline{CP} + \overline{PX} = p - r + y \cotg \theta$$

$$\overline{CX'} = \overline{CP'} + \overline{P'X'} = p' - r + y' \cotg \theta'$$

Donc:

$$\frac{p-r}{y} + \frac{1}{\tg \theta} = \frac{p'-r}{y'} + \frac{1}{\tg \theta'}$$

Mais:

$$p - r = - \frac{\sin j}{\sin \theta} \cdot r = - \frac{n \sin j}{n \sin \theta} \cdot r$$

Par suite:

$$\frac{1}{n'y' \sin \theta'} = \frac{1}{ny \sin \theta} - \frac{\sin (j'-j)}{n r \sin j \sin \theta \sin \theta'}$$

C'est la première formule de Max Lange; une transformation simple facilitera les calculs. En effet:

$$\frac{\sin (j'-j)}{\sin \theta \sin \theta'} = \frac{\sin (\theta'-\theta)}{\sin \theta \sin \theta'} = \cotg \theta - \cotg \theta'$$

Ainsi:

$$\frac{1}{n'y' \sin \theta'} = \frac{1}{ny \sin \theta} - \frac{\cotg \theta - \cotg \theta'}{r \times n \sin j}$$

et finalement, pour le système optique total:

$$73) \quad \frac{1}{n'y' \sin \theta'} = \frac{1}{ny \sin \theta} - \sum_{i=1}^{i=p-1} P_i, \quad \text{avec: } P_i = \left( \frac{\cotg \theta - \cotg \theta'}{r \times n \sin j} \right)_i$$

Les coordonnées de  $s'$  sont alors:

$$74) \quad b_s = y', \quad a_s = p' - x'_0 + b_s \cotg \theta'$$

Toutes les quantités qui figurent dans ces expressions sont relatives au dioptré de sortie,  $x'_0$  est l'abscisse de l'image paraxiale de l'objet.

b) Calcul de la focale tangentielle.

La 2<sup>e</sup> formule (71) peut s'écrire:

$$n \cos j \left( \frac{\cos j}{t} - \frac{1}{r} \right) = n' \cos j' \left( \frac{\cos j'}{t'} - \frac{1}{r} \right)$$

Si l'on divise les deux membres par  $n \sin j = n' \sin j'$ , il vient:

$$\frac{t \operatorname{tg} j}{r \cos j - t} = \frac{t' \operatorname{tg} j'}{r \cos j' - t'}$$

ou encore:

$$\frac{r \sin j}{r \cos j - t} - \operatorname{tg} j = \frac{r \sin j'}{r \cos j' - t'} - \operatorname{tg} j'$$

Le point d'incidence J

étant fixé, nous définirons le point T par l'ordonnée  $CQ = q$  du point Q de JP situé dans le plan frontal du centre C et par l'abscisse  $CV = v$ , par rapport à C, du point V où la normale en T à JP coupe l'axe.

Projetons sur Cx et CQ l'équation vectorielle:

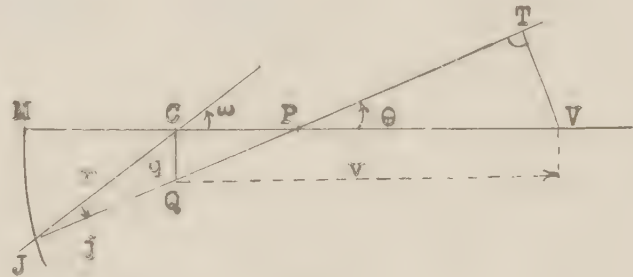


Fig. 9

$$\vec{CV} = \vec{CJ} + \vec{JT} + \vec{TV}$$

Il vient:

$$\begin{cases} -r \cos \omega + t \cos \theta + TV \sin \theta = v \\ -r \sin \omega + t \sin \theta - TV \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Par suite:

$$v = \frac{t - r \cos j}{\cos \theta}$$

Mais:

$$q = \frac{r \sin j}{\cos \theta} = - (p - r) \operatorname{tg} \theta.$$

donc:

$$\frac{q}{v} + \operatorname{tg} j = \frac{q'}{v'} + \operatorname{tg} j'$$

Nous avons donc à appliquer le groupe de formules suivantes:

$$75) \begin{cases} \begin{cases} q = (r - p) \operatorname{tg} \theta \\ q' = (r - p) \operatorname{tg} \theta' \end{cases} & \frac{q}{v} + \operatorname{tg} j = \frac{q'}{v'} + \operatorname{tg} j' \\ v_{2i+1} = v'_{2i-1} - d_{2i} \quad , \quad \text{avec} \quad d_{2i} = C_{2i-1} C_{2i+1} = -r_{2i-1} + e_{2i} + r_{2i+1} \end{cases}$$

Enfin, les coordonnées du point  $T'$  sont:

$$76) \quad \begin{cases} b_t = (v' + r - p) \sin \theta' \cos \theta' \\ a_t = (p' - x_0' + b_t \cotg \theta') \end{cases}$$

c) Dérivées de la focale sagittale.

Nous n'utiliserons pas l'expression de  $P_i$  donnée dans la formule (73)

$$P_i = \frac{\cotg \theta - \cotg \theta'}{r \times n \sin j}$$

car, en dérivant, on introduit la différentielle  $dj$  dont l'expression se déduit de celle de  $di$  (cf. par. 34) par la substitution indiquée au début de ce paragraphe.

Une autre forme de  $P_i$  fera apparaître la différence  $dj' - dj = d\theta - d\theta'$

Nous avons en effet:

$$\frac{n' \sin(j' - j)}{\sin j} = \frac{n' \sin j' \cos j}{\sin j} - \frac{n' \sin j \cos j'}{\sin j} = n \cos j - n' \cos j'$$

car,  $n \sin j = n' \sin j'$ .

Par suite: 
$$P_i = \frac{n \cos j - n' \cos j'}{n n' r \sin \theta \sin \theta'}$$

Puis: 
$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= - \frac{dr}{r} - \cotg \theta d\theta - \cotg \theta' d\theta' - \frac{n \sin j dj - n' \sin j' dj'}{n \cos j - n' \cos j'} \\ &= - \frac{dr}{r} - \cotg \theta d\theta - \cotg \theta' d\theta' + \frac{\sin j \sin j'}{\sin(j' - j)} (dj' - dj) \end{aligned}$$

Mais: 
$$\frac{\sin j \sin j'}{\sin(j' - j)} = \frac{\tg j \tg j'}{-\tg j + \tg j'} = \frac{\tg j \tg j'}{B}$$

Ainsi, en posant:

$$\frac{\tg j \tg j'}{B} = J, \quad -\cotg \theta - J = \lambda, \quad -\cotg \theta' + J' = \mu$$

on a pour chaque dioptre:

$$77) \quad \frac{dP}{P} = \lambda d\theta + \mu d\theta' - \frac{dr}{r}$$

et pour le système total:

$$\begin{aligned} 78) \quad & - \frac{1}{n' \sin \theta'} \cdot \frac{dy_s'}{y_s'^2} - \frac{1}{n' y_s'} \cdot \frac{\cos \theta'}{\sin^2 \theta'} \cdot d\theta' = \\ & = - \frac{1}{n \sin \theta} \cdot \frac{dy_s}{y_s^2} - \frac{1}{n y} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot d\theta - \sum_{i=1}^{i=2p-1} dP, \end{aligned}$$

le premier membre étant, comme à l'ordinaire, relatif à l'espace-image du système, et les deux premiers termes du second membre relatifs à l'espace-objet.

En général,  $y$  étant la dimension transversale de l'objet,  $dy = 0$ . Par contre, lorsque le diaphragme est à l'intérieur de l'instrument, comme c'est le cas le plus souvent, la marche d'un rayon pupillaire marginale est calculée à partir du diaphragme et de chaque côté de celui-ci; par suite, les dérivées de l'angle  $\theta$  de l'espace-objet ne seront pas nulles.

En vue du calcul numérique, éliminons  $d\theta'$  de la formule (77):

$$d\theta' = L_1 d\theta + L_2 dp + L_3 \frac{dr}{r},$$

où  $L_1 = B \cotg \theta + 1$ ,  $L_2 = -\frac{1}{r-p} \cdot B$ ,  $L_3 = \frac{p}{r-p} \cdot B$ ,

Nous avons alors:

$$79) \left\{ \begin{array}{l} dP = S_1 d\theta + S_2 dp + S_3 \frac{dr}{r} \\ \text{avec: } S_1 = P (\lambda + \mu L_1), \quad S_2 = P \cdot \mu L_2, \quad S_3 = P \cdot (\mu L_3 - 1) \end{array} \right.$$

Enfin, les formules (74) donnent par dérivation:

$$80) \quad da_s = dp' - dx'_0 + \cotg \theta' dy'_s - y'_s (1 + \cotg^2 \theta') d\theta'$$

d) Dérivées de la focale tangentielle.

Nous avons d'abord, pour chaque dioptre:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{q} &= \frac{dr-dp}{r-p} + \frac{1+\tg^2 \theta'}{\tg \theta} \cdot d\theta \\ &= \frac{r}{r-p} \frac{dr}{r} - \frac{1}{r-p} dp + (\tg \theta + \cotg \theta) d\theta. \end{aligned}$$

De même:

$$\frac{dq'}{q'} = \frac{r}{r-p} \cdot \frac{dr}{r} - \frac{1}{r-p'} \cdot dp' + (\tg \theta' + \cotg \theta') d\theta'$$

puis:

$$\frac{q'}{v'} \cdot \frac{dv'}{v'} - \frac{q}{v} \cdot \frac{dv}{v} = \frac{1}{v'} dq' - \frac{1}{v} dq + (1+\tg^2 j') dj' - (1+\tg^2 j) dj.$$

Or,

$$\tg^2 j' dj' - \tg^2 j dj = \sigma (\tg^3 j' - \tg^3 j),$$

où; d'après le paragraphe 34, on a posé:

$$\sigma = \frac{p}{r-p} \cdot \frac{dr}{r} - \frac{1}{r-p} \cdot dp + \cotg \theta d\theta,$$

d'où l'on déduit:

$$dj = \sigma \tg j, \quad dj' = \sigma \tg j'.$$

Il vient alors:

$$\sigma = \frac{dj}{tg j} = \frac{dj'}{tg j'} = \frac{dj' - dj}{tg j' - tg j} = \frac{d\theta' - d\theta}{tg j' - tg j}$$

Donc:

$$\begin{aligned} tg^2 j' dj' - tg^2 j dj &= \frac{tg^3 j' - tg^3 j}{tg j' - tg j} \cdot (d\theta' - d\theta) = \\ &= tg^2 j + tg j \cdot tg j' + tg^2 j' \cdot (d\theta' - d\theta) \\ &= B^2 + 3 tg j \cdot tg j' \cdot (d\theta' - d\theta) \end{aligned}$$

puisque :

$$B = -tg j + tg j'.$$

Nous avons donc:

$$\frac{q'}{v'} dv' - \frac{q}{v} dv = \frac{1}{v'} dq' - \frac{1}{v} dq + (B^2 + 3 tg j \cdot tg j' + 1)(d\theta' - d\theta).$$

En posant de plus:

$$81) \quad \begin{cases} tg \theta + \cotg \theta = \Theta \\ tg \theta' + \cotg \theta' = \Theta' \end{cases} \quad \begin{cases} B^2 + tg j \cdot tg j' + 1 = \\ A(1 - B \cotg \theta') = W \end{cases}$$

nous obtenons l'expression de  $dv'$  en fonction de  $d\theta, d\theta', dp, dp', dv, dr$ :

$$\begin{aligned} dv' &= -\frac{v'}{v} \cdot \frac{v'}{q'} \cdot (q\Theta + vC) d\theta + \frac{v'}{q'} (q'\Theta' + v'C) d\theta' + \\ &+ \frac{v'^2}{v} \cdot \frac{q}{q'} \cdot \frac{1}{r-p} dp - v' \cdot \frac{1}{r-p'} dp' + \left( v' \cdot \frac{1}{r-p'} - \frac{v'^2}{v} \cdot \frac{q}{q'} \cdot \frac{1}{r-p} \right) dr + \frac{q}{q'} \cdot \left( \frac{v'}{v} \right)^2 dv \end{aligned}$$

Posons encore:

$$82) \quad \frac{q}{v} : \frac{q'}{v'} = V, \quad \frac{vC}{q} = Q, \quad \frac{v'C}{q'} = Q'.$$

$dv'$  est alors de la forme:

$$83) \quad \left\{ \begin{aligned} dv' &= T_1 d\theta + T_2 dp + T_3 \frac{dr}{r} + T_4 dv \\ \text{Où l'on a posé:} \\ T_1 &= v' \left[ -V(\Theta + Q) + (\Theta' + Q')L - \frac{1}{r-p'} \cdot M_1 \right] \\ T_2 &= v' \left[ V \frac{1}{r-p} + (\Theta' + Q')L_2 - \frac{1}{r-p} \cdot M_2 \right] \\ T_3 &= v' \left[ \left( -V \cdot \frac{1}{r-p} + \frac{1}{r-p'} \right) r + (\Theta' + Q')L_3 - \frac{1}{r-p'} \cdot M_3 \right] \\ T_4 &= \frac{v'}{v} \cdot V \end{aligned} \right.$$

car on a, comme pour l'aberration sphérique:

$$dp' = M_1 d\theta + M_2 dp + M_3 \frac{dr}{r}$$

avec:

$$M_1 = -\omega \cotg \theta + A \cotg \theta', \quad M_2 = -\frac{1}{r-p} \cdot \omega, \quad M_3 = -\frac{p}{r-p} \cdot \omega + p'.$$

Les formules de l'espace-image s'écrivent:

$$84) \left\{ \begin{aligned} da_t &= dp' - dx'_o + \cotg \theta' \cdot db_t - b_t(1 + \cotg^2 \theta') d\theta' \\ db_t &= \sin^2 \theta' \cotg \theta' \cdot (dv' + dr - dp') + (v' + r - p')(1 - 2 \sin^2 \theta') d\theta' \end{aligned} \right.$$

### 37. DISTORSION.

a) Objet à distance finie.

La distorsion est définie par la variation, avec l'angle de champ, du grandissement linéaire transversal:

$$85) \quad g = \frac{y'}{y} = \frac{x' - p'}{x - p} \cdot \frac{\tg \theta'}{\tg \theta}$$

On exprime la condition d'orthoscopie en écrivant que, pour un angle de champ  $\theta$  donné, le grandissement  $g$  est égal au grandissement paraxial:

$$g_o = \frac{n_o}{n'} z_o:$$

$$86) \quad \delta g = \frac{x' - p'}{x - p} \cdot \frac{\tg \theta'}{\tg \theta} - \frac{n_o}{n'} \cdot z_o = 0$$

$$87) \quad d\delta g = \frac{x' - p'}{x - p} \cdot \frac{\tg \theta'}{\tg \theta} \cdot \left[ \frac{dx' - dp'}{x' - p'} - \frac{dx - dp}{x - p} + \right. \\ \left. + (1 + \tg^2 \theta') d\theta' - (1 + \tg^2 \theta) d\theta \right] - \frac{n_o}{n'} \cdot dz_o.$$

Dans ces formules, seuls interviennent les éléments de l'espace-objet et de l'espace-image du système total.

b) Objet à l'infini.

L'orthoscopie peut être définie par la condition:

$$88) \quad \mathcal{D} = (x' - p') \tg \theta' - F' \tg \theta = 0$$

$$89) \quad d\mathcal{D} = \tg \theta' \cdot (dx' - dp') + (x' - p')(1 + \tg^2 \theta') d\theta' - F'(1 + \tg^2 \theta) d\theta$$

### 38. VARIATION CHROMATIQUE DE L'ABERRATION SPHERIQUE OU DE TOUTE AUTRE

#### ABERRATION.

Une aberration  $\mathcal{A}$  étant calculée pour une radiation  $A$ , on calcule cette aberration pour une autre radiation  $R$ , de sorte qu'il s'agit

de résoudre l'équation:

$$90) \quad \mathcal{H}_A - \mathcal{H}_B = 0$$

A cet effet, on calcule  $d\mathcal{H}_A$  et  $d\mathcal{H}_B$ , ce qui ne présente aucune difficulté.

### 39. RESUME DES FORMULES.

a) Rayon de courbure du dioptré de rang  $j$  :

$$r_{2j-1} = (n_{2j} - n_{2j-2}) \cdot \frac{\Gamma_{2j-1}}{\Delta_{2j-1}}$$

avec :

$$\begin{cases} z_{2j} = \frac{v_{2j}}{v_{2p}} = \frac{v_{2j}}{v'} \\ \Gamma_{2j-1} = \Gamma_1 - \sum_{i=1}^{j-1} e_{2i} z_{2i} \quad , \quad \Delta_{2j-1} = n_{2j} z_{2j} - n_{2j-2} z_{2j-2} \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} \Gamma_1 = F' & \text{si l'objet est à l'infini} \\ \Gamma_1 = x_1 z_0 & \text{si l'objet est à distance finie.} \end{cases}$$

$$\left(\frac{dr}{r}\right)_{2j-1} = \left(\frac{d\Gamma}{\Gamma} - \frac{d\Delta}{\Delta}\right)_{2j-1}$$

b) Aberration chromatique de position.

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n' - n}{r} \quad , \quad x_{+2} = x' - de_{+1}$$

$$dx' = \frac{n}{n'} \cdot \frac{x'^2}{x^2} dx + \frac{n' - n}{r} \cdot \frac{x'^2}{n'} \cdot \frac{dr}{r} \quad , \quad dx_{+2} = dx' - de_{+1}$$

Le calcul étant fait au moyen de ces formules pour une radiation  $B$ , et l'abscisse de l'image de la radiation principale  $A$  par rapport au dioptré de sortie étant  $x'_A = \Gamma_{2p-1}$ , les formules finales s'écrivent:

$$x'_B - \Gamma_{2p-1} = C \quad , \quad C + dx'_B - d\Gamma_{2p-1} = 0 \quad .$$

c) Aberration chromatique de grandeur.

Si l'objet est à distance finie:

$$\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A = \frac{n_0}{n'} \times \frac{x'_1}{x_1} \times \frac{x'_3}{x_3} \times \dots \times \frac{x'_{2p-1}}{x_{2p-1}} - \frac{n_0}{n'} \cdot z_0 = 0$$

$$d\mathcal{E}_B - d\mathcal{E}_A = \left(\mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A + \frac{n_0}{n'} \cdot z_0\right) \left[ \sum_{j=1}^{j=p} \left(\frac{dx'_j}{x'_j} - \frac{dx_j}{x_j}\right)_{2j-1} \right] - \frac{n_0}{n'} dz_0$$

Si l'objet est à l'infini:

$$\frac{Y_B}{Y_A} = \frac{(n_2-1)_A}{(n-1)_B} \times \frac{1}{z_2} \times \left( n_2 \times \frac{x_3^0}{x_3} \times \frac{x^0}{x_5} \times \dots \times \frac{x_{2p-1}^0}{x_{2p-1}} \right) = 1$$

$$\frac{dY_B}{Y_B} - \frac{dY_A}{Y_A} = \left[ \sum_{j=2}^{j=p} \left( \frac{dx^j}{x^j} - \frac{dx}{x_{2j-1}} \right) \right]_B - \frac{dz_2}{z_2}$$

d) Aberration sphérique.

$$\begin{cases} \sin i = \frac{r-x}{r} \sin \alpha, & \alpha^0 = \alpha + i^0 - i, & \alpha_{+0} = \alpha^0 \\ \sin i^0 = \frac{n}{n^0} \sin i, & x^0 = r-r. \frac{\sin i^0}{\sin \alpha^0}, & x_{+2} = x^0 - e_{+1} \end{cases}$$

Si l'objet est à l'infini:  $\sin i_1 = \frac{H_e}{r_1}$   
Pour chaque dioptré:

$$\begin{cases} d\alpha^0 = L_1 d\alpha + L_2 dx + L_3 \frac{dr}{r} \\ dx^0 = M_1 d\alpha + M_2 dx + M_3 \frac{dr}{r} \end{cases}$$

avec:  $r-x^0 = A$ ,  $-tg i + tg i^0 = B$ ,  $A(1 - B \cotg \alpha^0) = \xi$

$$\begin{cases} L_1 = B \cotg \alpha + 1 \\ L_2 = -\frac{1}{r-x} \cdot B \\ L_3 = \frac{x}{r-x} \cdot B \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 = -\xi \cotg \alpha + A \cotg \alpha^0 \\ M_2 = \frac{1}{r-x} \cdot \xi \\ M_3 = -\frac{x}{r-x} \cdot \xi + x^0 \end{cases}$$

Formules de passage:  $d\alpha_{+2} = d\alpha^0$ ,  $dx_{+2} = dx^0 - de_{+1}$

Formules de l'espace-image:

$$\mathcal{L} = x^0 - x_0^0 = 0, \quad d\mathcal{L} = dx^0 - dx_0^0 = dx^0 - d\Gamma_{2p-1}$$

e) Coma.

Si l'objet est à distance finie:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha^0} - 1$$

$$d\mathcal{B} = -\frac{1}{z_0^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha^0} \cdot dz_0 - \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha^0}{\sin^2 \alpha^0} \cdot d\alpha^0 + \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot d\alpha,$$

formules écrites pour le système total.

Si l'objet est à l'infini:

$$B = H + F' \sin \alpha' = 0, \quad d B = F' \cos \alpha' d \alpha'$$

f) Astigmatisme et courbure de champ.

$\alpha$ , Formules relatives au rayon pupillaire.

$$\begin{cases} \sin j = \frac{r-p}{r} \sin \theta, & \theta' = \theta + j' - j, & \theta_{+2} = \theta' \\ \sin j' = \frac{n}{n'} \sin j, & p' = r - r' \cdot \frac{\sin j'}{\sin \theta'}, & p_{+2} = p' - e_{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\theta' = L_1 d\theta + L_2 dp + L_3 \frac{dr}{r} \\ dp' = M_1 d\theta + M_2 dp + M_3 \frac{dr}{r} \end{cases}$$

avec;  $r-p' = A, \quad -\operatorname{tg} j + \operatorname{tg} j' = B, \quad A(1-B \cotg \theta') = \omega$

$$\begin{cases} L_1 = B \cotg \theta + 1 \\ L_2 = -\frac{1}{r-p} \cdot B \\ L_3 = \frac{p}{r-p} \cdot B \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 = -\omega \cotg \theta + A \cotg \theta' \\ M_2 = \frac{1}{r-p} \cdot \omega \\ M_3 = -\frac{p}{r-p} \omega + p' \end{cases}$$

$$d\theta_{+2} = d\theta', \quad dp_{+2} = dp' + de_{+1}$$

$\beta$ , Focale sagittale.

Pour le système total:

$$\frac{1}{n' p' \sin \theta'} = \frac{1}{n y \sin \theta} - \sum_{i=1}^{i=p-1} p_i, \quad \text{avec: } p_i = \left( \frac{\cotg \theta - \cotg \theta'}{r - n \sin j} \right)_i$$

il faut avoir:  $a \equiv p' - x'_0 + y'_s \cotg \theta' = 0$

Dérivées de la focale sagittale.

$$da_s = dp' - dx'_0 + \cotg \theta' \cdot dy'_s - y'_s (1 + \cotg^2 \theta') d\theta'$$

$$= \frac{1}{n' \sin \theta'} \cdot \frac{dy'_s}{y_s'^2} - \frac{1}{n' y'_s} \cdot \frac{\cos \theta'}{\sin^2 \theta'} \cdot d\theta' =$$

$$= \frac{1}{n \sin \theta} \cdot \frac{dy_s}{y_s^2} - \frac{1}{n y_s} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot d\theta - \sum_{i=1}^{i=2p-1} dp_i$$

où, pour un dioptré quelconque, on a:

$$S_1 = P(\lambda + \mu L_1), \quad S_2 = P \cdot \mu L_2, \quad S_3 = P \cdot (\mu L_3 - 1)$$

$\gamma$ , Focale tangentielle.

Pour un dioptré quelconque:

$$\begin{cases} q = (r-p) \operatorname{tg} \theta \\ q' = (r-p') \operatorname{tg} \theta' \end{cases} \quad \frac{q}{v} + \operatorname{tg} j = \frac{q'}{v'} + \operatorname{tg} j'$$

$$v_{2i+1} = v'_{2i+1} - d_{2i}, \text{ avec: } d_{2i} = C_{2i-1} C_{2i+1} = -r_{2i+1} + e_{2i} + r_{2i+1}$$

Dans l'espace-image:

$$\begin{cases} b_t = (v' + r-p') \sin \theta' \cos \theta' \\ a_t = p' - x'_0 + b_t \cotg \theta' \end{cases}$$

Dérivées de la focale tangentielle:

Pour chaque dioptré, on pose:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta + \cotg \theta = \Theta & B + 3 \operatorname{tg} j \operatorname{tg} j' + 1 = C \\ \operatorname{tg} \theta' + \cotg \theta' = \Theta' & A (1 - B \cotg \theta') = \overline{\omega} \end{cases}$$

$$\frac{q}{v} : \frac{q'}{v'} = V, \quad \frac{V C}{q} = Q, \quad \frac{v' C}{q'} = Q'$$

On a:

$$dv' = T_1 d\theta + T_2 dp + T_3 \frac{dr}{r} + T_4 dv$$

où:

$$\begin{cases} T_1 = v' \left[ -V (\Theta + Q) + (\Theta' + Q') \cdot L_1 - \frac{1}{r-p'} \cdot M_1 \right] \\ T_2 = v' \left[ V \cdot \frac{1}{r-p} + (\Theta' + Q') \cdot L_2 - \frac{1}{r-p'} \cdot M_2 \right] \\ T_3 = v' \left[ (V \cdot \frac{1}{r-p} + \frac{1}{r-p'}) \cdot r + (\Theta' + Q') \cdot L_3 - \frac{1}{r-p'} \cdot M_3 \right] \\ T_4 = \frac{v'}{v} \cdot V \end{cases}$$

Dans l'espace-image :

$$\begin{cases} da_t = dp' - dx'_0 + \cotg \theta' \cdot db_t - b_t \cdot (1 + \cotg^2 \theta') d\theta' \\ db_t = \sin^2 \theta' \cotg \theta' \cdot (dv' + dr - dp') + (v' + r-p')(1 - 2 \sin^2 \theta') d\theta' \end{cases}$$

Passage d'un dioptré au suivant:

$$dv_{+2} = dv' - d(d_{+1}) , \quad \text{où: } d(d_{+1}) = -dr + de_{+1} + dr_{+2}.$$

g) Distorsion.

Si l'objet est à distance finie:

$$\mathcal{D} = \frac{x'-p'}{x-p} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta'}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{n_0}{n'} \cdot z = 0$$

$$d\mathcal{D} = \frac{x'-p'}{x-p} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta'}{\operatorname{tg} \theta} \cdot \frac{dx'-dp'}{x'-p'} - \frac{dx-dp}{x-p} + \\ + (1 + \operatorname{tg}^2 \theta') d\theta' - (1 + \operatorname{tg}^2 \theta) d\theta - \frac{n_0}{n'} dz_0$$

Si l'objet est à l'infini:

$$\mathcal{D} = (x'-p') \operatorname{tg} \theta' - F' \operatorname{tg} \theta = 0$$

$$d\mathcal{D} = \operatorname{tg} \theta' \cdot (dx'-dp') + (x'-p')(1+\operatorname{tg}^2 \theta') d\theta' - F'(1+\operatorname{tg}^2 \theta) d\theta ,$$

formules écrites pour le système total.

---

## CHAPITRE VI

Exemple numérique.40 - CHOIX D'UN AUTRE SYSTEME DE VARIABLES.

Dans l'exemple indiqué ci-dessous, nous avons remplacé le système de variables  $(z, e)$  par le système de variables  $(z, \Gamma)$  qui conduit à des calculs un peu plus rapides. Les rayons de courbure et épaisseurs et leurs dérivées sont alors données par les formules suivantes, pour un dioptré quelconque:

$$r = (n' - n) \frac{\Gamma}{\Delta} \quad , \quad \frac{dr}{r} = \frac{d\Gamma}{\Gamma} - \frac{n'dz' - n dz}{\Delta}$$

$$e = \frac{\Gamma_{-1} - \Gamma_{+1}}{z} \quad de = \frac{d\Gamma_{-1} - d\Gamma_{+1}}{z} - \frac{e}{z} dz$$

c'est-à-dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_{2j+1}} \cdot \frac{\partial r_{2j+1}}{\partial z_{2k}} = \frac{n_{2j}}{\Delta_{2j+1}} \quad , \text{ si } k = j \\ \\ = - \frac{n_{2j+2}}{\Delta_{2j+1}} \quad , \text{ si } k = j+1 \\ \\ = 0 \quad \text{ dans tous les autres cas.} \\ \\ \frac{1}{r_{2j+1}} \cdot \frac{\partial r_{2j+1}}{\partial \Gamma_{2k+1}} = \frac{1}{\Gamma_{2j+1}} \quad , \text{ si } k = j \\ \\ = 0 \quad , \text{ si } k \neq j \\ \\ \frac{\partial e_{2j}}{\partial z_{2k}} = - \frac{e_{2j}}{z_{2j}} \quad , \text{ si } k = j \\ \\ = 0 \quad , \text{ si } k \neq j \\ \\ \frac{\partial e_{2j}}{\partial \Gamma_{2k+1}} = \frac{1}{z_{2j}} \quad , \text{ si } k = j-1 \\ \\ = - \frac{1}{z_{2j}} \quad , \text{ si } k = j \\ \\ = 0 \quad , \text{ dans tous les autres cas.} \end{array} \right.$$

# 41 - CALCUL D'UN TRIPLET DU TYPE TAYLOR.

Nous avons appliqué la méthode exposée au cours des précédents chapitres au calcul d'un triplet, ouvert à F/3,5, de 1/2 champ égal à 20° et dont les verres sont les suivants:

|                              | C       | D       | F       |
|------------------------------|---------|---------|---------|
| lentille antérieure - C 1358 | 1,60987 | 1,61297 | 1,62041 |
| lentille médiane - C 1737    | 1,61209 | 1,61686 | 1,62883 |
| lentille postérieure-AF 134  | 1,65258 | 1,65595 | 1,66410 |

Nous sommes partis d'une combinaison choisie d'une manière totalement arbitraire, et, après trois itérations, nous sommes arrivés à une combinaison où la définition est satisfaisante, mais où l'astigmatisme est insuffisamment réduit. Seule, l'étude expérimentale de l'image indiquera la tolérance que l'on peut accorder à la définition afin de mieux réduire la poche d'astigmatisme. L'observation de l'image fournira les sous-corrrections ou sur corrections à apporter aux différentes aberrations introduites dans le calcul, c'est-à-dire, les modifications à faire subir aux termes constants des équations correspondantes. La résolution du système d'équations linéaires ainsi modifié est très rapide.

Les équations dont nous avons résolu le système sont les suivantes:

- (1)  $x^0 - x^1_F = 0$
- (2)  $(y^0_C)_{H_0=14,5} - y^1_0 = 0$
- (3)  $(y^1)_{\theta_0=23; p_1=40} - y^1_0 = 0$
- (4)  $(y^1)_{\theta_0=23; p_1=18} - y^1_0 = 0$
- (5)  $(y^1)_{\theta_0=23; p_1=0} - y^1_0 = 0$
- (6)  $(y^1)_{\theta_0=16; p_1=55} - y^1_0 = 0$
- (7)  $(y^1)_{\theta_0=16; p_1=0} - y^1_0 = 0$
- (8)  $(H_0 + F^0 \sin X^0)_{H_0=14,5} = 0$
- (9)  $(y^1_s)_{\theta_0=23; p_1=18} - y^1_0 = 0$

Pour chaque itération, les calculs ont été effectués au moyen d'une multiplicitrice à clavier complet, mise électriquement, de capacité 8X8 ; 16. Chaque ligne trigonométrique (sin, tg ou Arc sin), obtenue à l'aide des tables en grades à 8 décimales de l'Union Géodésique internationale, nécessite une durée de calcul sensiblement égale à celle d'une multiplication, soit environ 25 secondes. Dans ces conditions les temps de calcul des fonctions et de leurs dérivées sont les suivantes:

Calcul des  $(r, e)$  et de leurs dérivées à partir des  $(z, F)$ ..... 1h.  
 Calcul des  $x^1$  et de ses dérivées pour une raie quelconque.....1h30  
 Calcul de  $y^1$  et de ses dérivées pour un rayon lumineux quelconque 3h  
 Calcul de  $y^1_s$  et de ses dérivées pour un rayon lumineux déjà calculé..... 2h  
 Formation du système d'équations linéaires..... 0h30

Résolution du système d'équations linéaires..... 7h  
 Durée de calcul pour chaque itération..... 30h

Soit au total, en tenant compte des temps morts inévitables dans un calcul, une durée de trois semaines environ, non compris la construction par points des courbes d'aberrations obtenues.

L'expérience du calcul optique pouvant conduire à un choix plus judicieux des valeurs de départ, en particulier des valeurs initiales des  $\Gamma$  (c'est à-dire ici une augmentation assez sensible des épaisseurs), deux itérations peuvent suffire, nécessitant 15 jours de travail.

Dans tous les cas, la retouche finale indiquée plus haut devrait lieu à quelques heures de calcul. On peut la réaliser sans nouveaux calculs des dérivées si les corrections à apporter aux aberrations sont faibles.

Quelques tableaux de calculs sont donnés à titre d'exemple.

#### 42 - DEUXIEME EXEMPLE.

Alors qu'au Colloque "La Théorie des Images optiques" d'octobre 1963, M. Van HEEL a donné un exemple de calcul d'un triplet effectué à partir d'une combinaison optique qu'il indique. Il s'agissait de calculer un objectif ouvert à  $F/4.5$ , de  $1/2$  champ voisin de  $18^\circ$  et devant fournir une image dont la définition soit de  $1/10$  de mm. en tout point du champ pour une focale égale à 100 mm.

Nous avons refait le même calcul en un temps égal au  $1/3$  du temps indiqué par M. Van HEEL (une seule itération a suffi) et obtenu une définition supérieure, comme l'indique les courbes ci-jointes (les traits pleins).

Les rayons de courbure et les épaisseurs de la combinaison ainsi calculée sont:

|                    |                  |                    |
|--------------------|------------------|--------------------|
| $r_1 = 36,020$     | $e_2 = 4,668$    | $n_2 = 1,62197$    |
| $r_3 = -927,122$   | $e_4 = 11,423$   |                    |
| $r_5 = -46,535$    | $e_6 = 1,614$    | $n_6 = 1,65260$    |
| $r_7 = 35,015$     | $e_8 = 12,522$   |                    |
| $r_9 = 159,578$    | $e_{10} = 4,404$ | $n_{10} = 1,62197$ |
| $r_{11} = -39,130$ |                  |                    |



## BIBLIOGRAPHIE

Les publications que nous avons dû consulter ont été classées en 11 groupes d'importance inégale, qui sont les suivantes:

I - Publications dont les auteurs ont résolu le problème complet et cherché sa solution:

- 1) BOULANGER (R.), Théorie des systèmes optiques simples, (Thèse de doctorat - 1922)
- 2) BIOT (A.), Calculs d'optique - 1936
- 3) CHETIEN (R.), Calcul des combinaisons optiques - 1938.

II - Publications qui traitent du calcul d'un système de lentilles corrigé des aberrations du 3<sup>e</sup> ordre.

- 4) CHARLIER (C.V.L.) Entwurf einer analytischen Theorie zur Construction von astronomischen und photographischen Objectiven (Vierteljahrsschrift der naturhistorischen Gesellschaft - 31 (1896), 266 - 278 .
- 5) CONRADY Applied optics and optical design - 1929.
- 6) HARTING (H.) Zur Berechnung astronomischer Fernrohrobjective, (Z. Instrum. 19 (1899) 104.
- 7) LEMAN Zur Berechnung von Fernrohr und schwach vergrößerten Mikroskop Objectiven (Z. Instrum 19 (1899) 272-273.
- 8) SCHWARGSCHILD (K.) Untersuchungen zur geometrischen Optik. Berlin, 1905)
- 9) TURRIERE (E.) Sur le calcul des objectifs astronomiques de Fraunhofer (1917)
- 10) TURRIERE (E.) Le problème des objectifs de longues-vues dans la dioptrique contemporaine. (Exposition des recherches de M.H. HARTING, 1918)
- 11) VIOLETTE (Vice Amiral) La Géométrie et les instruments d'optique, 1934
- 12) VIOLETTE (Vice Amiral) Note pour servir à la correction des grands instruments d'optique (R. Opt. 14 (1935) 81-106.

III - Publications contenant des calculs de fonctions aberrations, suivis de données de constructions d'objectifs, sans justification de la méthode suivie pour les obtenir.

- 13) VAN HULST (A. G. S.) Calcul des aberrations du 5<sup>e</sup> ordre et projet tenant compte de ces aberrations (Communication sur des travaux de J. KORRINGA et W. G. STEPHAN) - (Théorie des im. opt. Coll. int. oct. 1946, 32-67).
- 14) KORRINGA Thèse (1942)
- 15) STEPHAN (W. G.) Praktische Anwendungen im Gebiet der abstrakten optik (Thèse de doctorat 1947, 136 p.).

IV - Publications où l'on peut suivre l'établissement de formules différentielles pour retouches finales, mais ne révélant pas la méthode que suivraient leurs auteurs pour les appliquer à des cas concrets.

- 16) AULAY (A. L.) Calcul des aberrations d'un système optique contre coefficients différentiels résultant de la modification d'une surface de la combinaison. (Proc. Phys. Soc. 57 (1945) 345-440).
- 17) BRUCKSHANK (F.) Un système de coefficients différentiels de passage pour l'étude des aberrations:  
 1) Théorie générale de ces coefficients.  
 2) Termes correctifs concernant le 2<sup>e</sup> ordre des aberrations. (Proc. Phys. Soc. 57 (1945) 350-361 - 362-367).
- 18) BRUCKSHANK (F. D.) System of transfer coefficients for use in the design of lens systems. (Proc. Phys. Soc. 57 (1945) 419-425, 426-429, 430-435).
- 19) BRUCKSHANK (F. D.) A system of transfer coefficients for use in the design of lens systems. (Proc. Phys. Soc. 58, (1946) 296-302).
- 20) BRUCKSHANK (F. D.) Correction par la voie isopneumatique des objectifs de microscopes. (J. L. opt. Soc. Amer. 36 (1946) 296-298).
- 21) SAITH (T.) Formules différentielles en optique géométrique. (Proc. Phys. Soc. 57 (1945) 558-564).
- 22) STALL (V.) Über eine Differenzformel zur Sinus eine Isopneumatische bedingung mit Bemerkungen zur Seidelschen Theorie. (Z. Instrum. 62 (1942) 376-387).
- 23) STEPHAN (W. G.) An Empirical Approach to Lens designs with HYUGENS Eyepiece (J. Opt. Soc. Amer. 33 (1933) 278-292).

- 24) STEMPER A differential adjustment method of focusing optical systems. (J. Opt. Soc. Amer. 38 (1948) 935-953.)

V - Publications se limitant au calcul d'objectifs minces corrigés seulement de certaines aberrations (aberrations géométriques du 3<sup>e</sup> ordre.)

- 25) HOCH (E. V.) Der sphärische Aberrations und der Correction desselben bei Fernrohrobjectiven. (Z. f. Instrum. 8 (1888) 117-129.)
- 26) MORAIS Nouvelle méthode de calcul d'un objectif triple a lentilles collées. (Optica. 3 (1938) 176-187)
- 27) VAN DER PIEL (G. W.) Sur les aberrations stigmatiques et orthoscopiques (R. Opt. 4 (1925) 229).
- 28) SMITH (T.) Notes on the calculation of thin objectives. (The Phys. Labor. Coll. research 13 (1916) 181-193).
- 29) SMITH (T.) The treatment of elementary aberration theory with special reference to thin lens. (La théorie des optiques. Coll. internat. oct. (1946) 11-17).
- 30) SMITH (T.) Exemple of calculation of an optical system. (Théorie des im. opt. Coll. internat. (oct. 1946) 105-106).
- 31) STEINHEIL und VOLF Handbuch der angewandten Optik - (1891).

VI - Publications définissant les aberrations au moyen d'expressions analytiques destinées, en principe, au calcul des combinaisons optiques. (Travaux purement théoriques).

- 32) BEREK (E.) Bemerkungen zu den Eikonale und Bestimmung der Koeffizienten des Winkелеikonals. (Z. Instrumentenkunde - 61 (1941) 337-345).
- 33) BUCHDAHL Analyse algébrique des aberrations d'ordre supérieur dans les systèmes optiques: aberrations tangentielles d'un système de surfaces sphériques centrées. (Proc. Phys. Soc. 58 (1946) 545-575).
- 34) EPHESER (E.) Eine moderne Darstellung der Gauss'schen Arbeiten zur Strahlenoptik. (Ann. Physik 38 (1940) 501-541).
- 35) HERZBERGER (M.) Strahlenoptik - (1931) 196 p.).
- 36) HERZBERGER On the fundamental optical invariant, the optical tri-  
trarily principle and on the new development of Gaussian  
optics based on this law. (J. opt. Soc. Amer. 25 (1935) 295-304).

- 37) HERZBERGER A simplified theory of the image according to saidol.  
(J. opt. Soc. Amer. 26 (1936) 35-51).
- 38) HERZBERGER On the characteristic function of Hamilton, the Eiconal of Burns and their use in optic. p. 177-180.
- 39) 2) A new theory of optical image formation. p. 197-204.
- 40) 3) First order laws in Asymmetrical optical systems.  
p. 354-359.
- 41) 4) First order laws in asymmetrical opt. systems;  
p. 389-406. (J. Opt. Soc. Amer. 26 (1936)).
- 42) HERZBERGER Théorie des aberrations du 5<sup>e</sup> ordre dans les systèmes de révolution (I). (J. Opt. Soc. Amer. 29 (1939) 395-406).
- 44) HOPKINS (H.H.) Higher order aberrations consequent upon oblique refraction at a spherical interface.  
(Théorie des im. Opt. Coll. interant. (oct. 1946) 68-84).
- 45) DI JORIO (M.) Théorie générale de l'imagerie des systèmes optiques ayant un plan de symétrie. (Nuovo Cimento 6 (1949) 57-61).
- 46) MARX (H.) Systèmes optiques centrées. Calcul des coefficients des aberrations et des coefficients du développement de l'iconale pour un ordre quelconque.  
(Optik 4 (1948) 97-148).
- 47) MARX (H.) Un nouveau mode de traitement des aberrations du 3<sup>e</sup> ordre (I). Partie théorique.  
(Optik 2 (1947) 364-381).
- 48) OSSEN (C.W.) Une méthode nouvelle de l'optique géométrique.  
(Kungl. Svenska Vit. Akad. Handlingen Stockholm. 3<sup>e</sup> serie 15 (1936) - 41 p.).
- 49) PICT (J.) Bemerkungen zu den Fundamentalgleichungen des Winkeleikonals. (Z. Instrumentenkunde - 62 (1942) 282-285).
- 50) SMITH (T.) The primary and secondary constant magnification surfaces of thin lenses. (Trans. Opt. Soc. 25 (1923-1924) 89-95).
- 51) SMITH (T.) A reference system for primary aberrations.  
(Trans. Opt. Soc. 25 (1923-24) 130-134).
- 52) SMITH (T.) The addition of aberrations. (Trans. Opt. Soc. 25 (1923-24) 177-199).
- 53) SMITH (T.) A general solution of the first order aberrational equations. (Trans. Opt. Soc. 25 (1923-24) 273-282).

- 54) SMITH (T.) 1) Some uncultivated optical fields.  
 55) 2) The stationary value of axially symmetric functions.  
 (Trans. Opt. Soc. 28 (1926-27) 226-284, 285-296).  
 56) SMITH (T.) Hamilton's characteristic function and the design of  
 optical instruments. (La théorie des images optiques,  
 Coll. internat. (oct. 1946) 18-28).  
 57) SYNGE (J.L.) Grammatical optics an introduction to Hamilton's  
 Method. (Cambridge tracts in Math. and Math Physics,  
 37 (1937) 110 p.).

VII) Publications où les aberrations sont développées en plusieurs ordres.

- 58) KOHLSHUTTER Die Bildfehler Fünfter Ordnung.  
 59) KORFF (G.) Ein Ausgleichsverfahren für die Koeffizientenbestimmung in der Potenzreihenentwicklung der sphärischen Aberration. (Z. Instrumentenkunde 63 (1943) 81-90).  
 60) MORAIS (C.) Consideraciones sobre, el coma, y sobre la aberracion del seno. p. 149-164.  
 61) Consideraciones sobre la aberracion esfero-cromatica. p. 165-174.  
 (Anales Soc. Esp. Fis. y Quimica 44 (1948) 149-164, 165-174).  
 62) MORAIS (C.) Leyas de formacion de las aberraciones de R-Esimo orden.  
 63) Estudio general de las aberraciones di R-Esimo orden (Anales Soc. Esp. Fis. y Quimica 44 (1948) 656-667, 668-670).  
 64) SCHEIBNER (W.) Diaptrische Untersuchungen. (Abhandl. Leipzig Akad. Wissenschaften 11 (1876) 541-620).  
 65) WACHENDORF (F.) Calcul des aberrations du 5° ordre dans les systèmes optiques centrés. (Optik 5 (1949) 80-122).

VIII) Publications se rattachant à la dioptrique élémentaire et aux formules de Seidel.

- 66) DURAND (E.) 1) Etude analytique des systèmes centrés (dioptrique élémentaire) p. 91-104, Revue Opt. 23 (1944)  
 67) 2) Marches paraxiales (dioptrique du 1° ordre) p. 215-221, Revue Opt. 23 (1944).  
 68) 3) Aberrations du 3° ordre dans les systèmes centrés et aberrations chromatiques. p. 137-150, Revue Optique 24 (1945).

- 69) HOPKINS Transformation des formules connues de l'astigmatisme  
(Proc. Phys. Soc. 58 (1946) 663-668).
- 70) ROOS (W.) Übersichtliche Diagramme für die Seidelschen Bildfehler  
einer dünnen Einzellinse.  
(Z. Instrumentenkunde 61 (1941) 271-278).
- 71) SEIDEL (L.) Zur Theorie der Fernrohr-objective.  
(Astr. Nach. 35 (1853) 301-316).
- 72) SEIDEL (L.) Zur Dioptrik. (Astr. Nach. 37 (1854) 105-120),  
43 (1856) 289-332).
- 73) SCHULZ (H.) Beiträge zur geometrischen Optik.  
(Z. Instrumentenkunde - 62 (1942) 119.)
- 74) STAEBLE (F.) Über eine Differenzenformel zur Sinus und Isoplanas-  
sübedingung mit Bemerkungen zur Seidelschen Theorie.  
(Z. Instrumentenkunde - 62 (1942) 376).
- 75) TIEDEKEN (R.) Die Seidelschen Bildfehler für Plannegativsysteme.  
(Z. Instrumentenkunde 61 (1941) 289-298).

IX - Publications consacrées à des études géométriques sur les faisceaux lumineux et sur les caustiques.

- 76) GULLSTRAND (A.) Das allgemeine optische Abbildungssystem. Stockholm  
1915 4° 139 p. (Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens  
Handlingar Stockholm - 55 (1915) n° 1).
- 77) HOPKINS (H.) Au sujet de la condition des sinus d'Abbe et de la  
condition de HERSCHELL. (Proc. Phys. Soc. 58 (1946)  
92-99, 100-105).
- 78) KORFF (G.) Zum Gausschen Princip der Totalundeutlichkeit.  
(Z. Instrumentenkunde - 61 (1941) 208-212).
- 79) KORFF (G.) Totalundeutlichkeit und Seidelsche Theorie.  
(Z. Instrumentenkunde 62 (1942) 285-290).
- 80) THOMESCHUTZ (L.) Calcul métrique des Aberrations; Formules donnant les  
coefficients partiels des surfaces pour les écarts  
transversaux d'astigmatisme et pour les écarts à la  
condition d'isoplanétisme de BERCK.  
(Z. Instrumentenkunde 63 (1943) 309-314).

X - Traités d'optique géométrique effleurant le problème.

- 81) BOUTRY (G.) Optique instrumentale. (p. 492 et Suivantes) -1946.
- 82) BEREK (M.) Grundlagen der praktischen Optik.

- 83) CARATHEODORY (C.) Geometrische Optik. (Ergeb. Math. Grenzgebiete 4-5, (1937)).
  - 84) CZAPSKI Optique géométrique. (1904)
  - 85) GLEICHEN (A.) Lehrbuch der geometrischen Optik - 1902.
  - 86) GLEICHEN (A.) Leitfaden der praktischen Optik. Leipzig - 1908.
  - 87) GRUNER (P.) Leitfaden der geometrischen Optik und ihrer Anwendung auf die optischen Instrumente. - 1921.
  - 88) KERBER Contribution à la dioptrique.
  - 89) KONIG (A.) Geometrische Optik. (Handbuch der Experimentalphysik 20, 2 (1929) Leipzig. 545 p.).
  - 90) MERTE, RICHTER,  
VON BOHR Handbuch der Wissenschaftlichen und angewandten Photographie.
  - 91) PICT (J. S. E.) Optische Abbildung (1 vol. 243 p. (1931)).
  - 92) VON BOHR (M.) Die Bilderzeugung in optischen Instrumente.
  - 93) VON BOHR (M.) Theorie und Geschichte des photographischen Objectivs.
  - 94) TAYLOR (H. D.) A system of applied Optics. (1906) London.
  - 95) WHITTAKER (E. T.) The theory of optical Instruments. (Cambridge Tracts in mathematics and mathematical physics, 7. Cambridge 1907).
- XI - Publications relatives à des marches trigonométriques et analytiques de rayons lumineux à travers un système centré.
- 96) BAKER (T. Y.) Marche des rayons hors d'un plan méridien à travers une surface de révolution du 2° degré.  
(Proc. Phys. Soc. 56 (1944) 114-122).
  - 97) CLEMENTI (A.) Une nouvelle formule de contrôle pour le calcul trigonométrique des marches méridiennes et son application dans le calcul des pinceaux sagittaux.  
(R. opt. 28 (1949) 533-536).
  - 98) CLEMENTI (A.) Le facteur sagittal commun aux pinceaux en dehors de l'axe et une nouvelle méthode pour le calcul rapide de ces pinceaux. (R. opt. 28 (1949) 537-547).
  - 99) COMRIE (L. J.) Emploi des machines pour les calculs d'optique.  
(R. opt. 22 (1943) 231).

- 100) GAUSS            Dioptrische Untersuchungen (1841) 34 p.
- 101) LANGE (Max)    Vereinfachte Formeln für die trigonometrischen Durchrechnung optischer System. - 1929.
- 102) MORAIS (C.)    Nuevo metodo de calculo de rayos obliquos cualesquiera (Anales Soc. Esp. Fis y Quimica (1) 44 (1948) 567-578).
- 103) ROLL (E.)      Einfaches Rechenverfahren zur Einrichtung einer bestimmten Brennweite eines optischen Systems durch geeignete Durchbiegung einer beliebiger Fläche. (Z. Instrumentenkunde 55 (1935) 379-382).
- 104) SCANDONE (F.) Calcul algébrique des rayons dans un système optique centré. (Optica 2 (1948) 62-66).
- 105) SEIDEL (L.)    Trigonometrische Formeln für allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrierten sphärischen Flächen (Sitz. Kön. Bay. Akad. Wissenschaften, München (1866) (II) 263-283).
- 106) SLUSSAREFF (G.) Méthode rapide pour le calcul trigonométrique de la marche des rayons lumineux à travers une combinaison optique. (R. Opt. 3, (1924) 441).
- 107) SMITH (T.)    On tracing rays through an optical system. (The Nat. Phys. Labor. Coll. Researchs 13 (1916) 169-177).
- 108) SMITH (T.)    Marche d'un rayon à travers un système optique. (Proc. Phys. Soc. 57 (1945) 286-293).
- 109) TEMMERMAN (F.) Calcul numérique des rayons obliques. (R. Opt. 26 (1947) 423-433).
- 110) THOMESCHEIT (A.)  
Zerlegung der Aberration meridionaler Strahlenbündel bei optischen Systemen in Anteile der einzelnen Glieder und Bildfehlerarten auf Grund trigonometrischer Strahlenrechnung. (Z. Instrumentenkunde, 62 (1942) 105-119).

# TABLE DES MATIERES

---

|                                                                          |       |
|--------------------------------------------------------------------------|-------|
| INTRODUCTION.                                                            | p. 1  |
| CHAPITRE I.<br>Formules paraxiales fondamentales.                        | p. 5  |
| CHAPITRE II.<br>Autres formules de l'approximation de GAUSS.             | p. 13 |
| CHAPITRE III<br>Liens entre l'optique de Seidel et celle de M. Boulouch. | p. 19 |
| CHAPITRE IV.<br>Résolution du système des équations aux aberrations.     | p. 27 |
| CHAPITRE V.<br>Calcul des aberrations et de leurs dérivées.              | p. 31 |
| CHAPITRE VI.<br>Exemples numériques.                                     | p. 49 |
| BIBLIOGRAPHIE.                                                           | p. 53 |

---







# ERRATA

-:-:-

Page 3, ligne 7, lire : des formes matricielles (Smith 56)

Page 3, paragraphe 1, ligne 2, lire : à des retouches successives

Page 13, avant-dernière formule, au lieu de :  $h_j = \frac{H_1}{H_0}$   
lire :  $h_1 = \frac{H_1}{H_0}$

Page 17, 3 ème formule, 1er membre, au lieu de :  $n_{2j-2} h_{2j-2}$   
lire :  $n_{2j-2} h_{2j-2}$

Page 18, dernière formule, au lieu de :  $\rho = \frac{h_1}{h_j}$  lire :  $\rho = \frac{h_1}{h_j}$

Page 19, paragraphe 18, ligne 5, lire : la variation de l'indice d'un milieu

Page 20, ligne 4, au lieu de :  $\frac{1}{H_0^2} v_j^2$ , lire :  $\frac{1}{H_0^2} v_{2j-2}^2$

Page 27, ligne 13, au lieu de :  $y(y_0)$ , lire :  $y - y_0$

Page 28, formule (46), au lieu de :  $\Delta x_i$ , lire :  $\Delta x_j$

Page 29, 1 ère formule, dernier membre, au lieu de :  $F_1$ , lire :  $F'$

Page 29, formule (49), au lieu de :  $\Gamma_{2j-1}$ , lire :  $\Gamma_{2p-1}$

Page 31, avant dernière ligne, au lieu de : relations, lire, relatives

Page 33, formule (58), au lieu de :  $\frac{x'_{2j-1}}{x_{2j-1}}$ ; lire :  $\frac{x'_{2p-1}}{x_{2p-1}}$

Page 34, formule (59), lire la formule écrite page 44, (dernière ligne)

Page 34, ligne 16, au lieu de :  $y)$  lire :  $y'$

Page 34, formule (61) au lieu de :  $\frac{dx_2}{z}$  lire :  $\frac{dz_2}{z_2}$

Page 35, 4 ème formule, au lieu de :  $\frac{\sin i'}{\sin i}$  lire :  $\frac{\sin i'}{\sin \alpha'}$

Page 36, 1 ère formule, au lieu de :  $dx$  lire :  $dx'$

Page 36, paragraphe 35, sous-titre, au lieu de : Coma, lire : Coefficient de Coma

Page 36, paragraphe 35, a, au numérateur de  $g_H$  : au lieu de :  $n$   
lire :  $n_0$

Page 36, formule (68), coefficient de  $dz_0$  : au lieu de :  $\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$   
lire :  $\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$

Page 36, formule (68), coefficient de  $d\alpha'$  : au lieu de :  $\frac{\sin \alpha' \cos \alpha'}{\sin \alpha \cos \alpha'}$   
lire :  $\frac{\sin \alpha' \cos \alpha'}{\sin \alpha \cos \alpha'}$

Page 36, formule (68), signe devant le 3 ème terme : au lieu de : -  
lire : +

Page 38, formule (73), au lieu de :  $\sum_{i=1}^{i=p-1} \rho_i$  lire :  $\sum_{i=1}^{i=p} \rho_{i-1}$

- Page 40, ligne 19, au lieu de :  $J'$  lire :  $J$
- Page 40, dernière ligne, au lieu de :  $y$  lire :  $y_0$
- Page 40, dernière ligne, au lieu de :  $\sum_{i=1}^{i=2p-1} dP$  lire :  $\sum_{i=1}^{i=p} dP_{2i-1}$
- Page 41, ligne 22, (expression de  $\frac{dq'}{q'}$ ), au lieu de :  $\frac{1}{2-p}$  lire :  $\frac{1}{2-p'}$
- Page 42, ligne 8, au lieu de :  $\frac{q'}{v'} \cdot dv' - \frac{q}{v} dv$  lire :  $\frac{q'}{v'} \cdot \frac{dv'}{v'} - \frac{q}{v} \cdot \frac{dv}{v}$
- Page 42, formule (81), lire :  $B^2 + 3tg j tg j' + 1 = C$
- Page 43, formule (86), 2 ème membre, au lieu de :  $\theta$  lire :  $0$
- Page 46, 1 ère formule du paragraphe  $(f, \beta)$ , au lieu de :  $\sum_{i=1}^{i=2p-1} P_i$  lire :  $\sum_{i=1}^{i=p} P_i$
- Page 46, dernière formule, au lieu de :  $\sum_{i=1}^{i=2p-1} dP_i$  lire :  $\sum_{i=1}^{i=p} dP_{2i-1}$
- Page 47, ligne 15, lire :  $tg \theta' + \cotg \theta' = \theta'$
- Page 47, ligne 16, au lieu de :  $VC$  lire :  $vC$
- Page 48, ligne 6, ouvrir un crochet après :  $\frac{tg \theta'}{tg \theta}$
- Page 48, ligne 7, fermer un crochet après :  $d\theta$
- Page 48, dernière formule, (coefficient de  $d\theta$ ) au lieu de :  $tg^2 \theta'$  lire :  $tg^2 \theta$
- Page 50, équation (8), au lieu de :  $\sin X'$  lire :  $\sin \alpha'$
- Page 50, 3 lignes avant la fin, au lieu de :  $y_0$  lire :  $y'_0$

# TABLEAU DES ITÉRATIONS SUCCESSIVES

## COMBINAISONS OPTIQUES N<sup>os</sup>

Système de départ

Système final

|                                  | 1         | 2        | 3         | 4        |
|----------------------------------|-----------|----------|-----------|----------|
| $\delta Z_2$                     |           | 0.1580   | 0.0087    | 0.0575   |
| $\delta Z_4$                     |           | — 0.1348 | 0.0566    | 0.1607   |
| $\delta Z_6$                     |           | — 0.0868 | 0.1117    | 0.0405   |
| $\delta Z_8$                     |           | — 0.0427 | — 0.0856  | 0.0555   |
| $\delta Z_{10}$                  |           | — 0.0084 | 0.0500    | — 0.0327 |
| $\delta \Gamma_3$                |           | — 1.0000 | 1.0000    | — 3.0000 |
| $\delta \Gamma_5$                |           | — 3.5150 | 1.9297    | — 2.3753 |
| $\delta \Gamma_7$                |           | — 0.8552 | — 2.6448  | 0.2101   |
| $\delta \Gamma_9$                |           | — 0.1113 | — 2.0510  | 0.4006   |
| $\delta \Gamma_{11}$             |           | 0.1657   | — 2.6555  | 0.6255   |
| $Z_2$                            | 1.1000    | 1.2580   | 1.2667    | 1.3242   |
| $Z_4$                            | 1.8500    | 1.7152   | 1.7718    | 1.9325   |
| $Z_6$                            | 0.8000    | 0.7132   | 0.8249    | 0.8654   |
| $Z_8$                            | — 0.2500  | — 0.2927 | — 0.3783  | — 0.3228 |
| $Z_{10}$                         | 0.1200    | 0.1116   | 0.1616    | 0.1239   |
| $\Gamma_3$                       | 95.0000   | 94.0000  | 95.0000   | 92.0000  |
| $\Gamma_5$                       | 85.0000   | 81.4850  | 83.4147   | 81.0394  |
| $\Gamma_7$                       | 81.0000   | 80.1448  | 77.5000   | 77.7101  |
| $\Gamma_9$                       | 82.0000   | 81.8887  | 79.8379   | 80.2385  |
| $\Gamma_{11}$                    | 81.4000   | 81.5657  | 78.9102   | 79.5357  |
| $r_1$                            | 34.807    | 30.435   | 30.227    | 28.914   |
| $e_2$                            | 4.545     | 4.769    | 3.947     | 6.041    |
| $r_3$                            | — 872.536 | 180.399  | 209.980   | 267.660  |
| $e_4$                            | 5.405     | 7.297    | 6.539     | 5.672    |
| $r_5$                            | — 97.727  | — 92.572 | — 122.485 | — 97.455 |
| $e_6$                            | 5.000     | 1.879    | 7.170     | 3.847    |
| $r_7$                            | 32.797    | 34.652   | 28.303    | 28.208   |
| $e_8$                            | 4.000     | 5.958    | 6.180     | 7.833    |
| $r_9$                            | 121.097   | 113.672  | 81.927    | 99.174   |
| $e_{10}$                         | 5.000     | 2.894    | 5.742     | 5.452    |
| $r_{11}$                         | — 67.546  | — 66.522 | — 71.674  | — 67.244 |
| $x'_C - x'_F$                    | 0.199     | 0.369    | 0.266     | 0.258    |
| $\delta y' H_0 = 14,5$           | 0.039     | — 0.306  | 0.028     | 0.033    |
| $\delta y' 23; 40$               | 2.680     | 0.836    | 0.247     | — 0.019  |
| $\delta y' 23; 18$               | 1.040     | 0.581    | 0.127     | 0.032    |
| $\delta y' 23; 0$                | 0.516     | 0.252    | 0.425     | 0.184    |
| $\delta y' 16; 55$               | 1.270     | 0.343    | 0.179     | — 0.004  |
| $\delta y' 16; 0$                | 0.139     | 0.071    | 0.120     | 0.039    |
| $(H_0 + F' \sin \alpha')_{14,5}$ | 0.174     | — 0.442  | 0.071     | 0.011    |
| $(\delta y' s)_{23; 18}$         | — 1.500   | — 0.694  | — 0.369   | — 0.382  |



**SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES**  
**1<sup>re</sup> ITÉRATION**

|                                                | $Z_2$     | $Z_4$    | $Z_6$    | $Z_8$     | $Z_{10}$ | $\Gamma_3$ | $\Gamma_5$ | $\Gamma_7$ | $\Gamma_9$ | $\Gamma_{11}$ | Fonctions |
|------------------------------------------------|-----------|----------|----------|-----------|----------|------------|------------|------------|------------|---------------|-----------|
| 1<br>$x'C - x'F$<br>$(\delta y')_{H_0} = 14,5$ | 0.0841    | — 0.6567 | 0.1061   | 0.7362    | 0.0160   | 0.0124     | — 0.0274   | — 0.0266   | — 0.0074   | 0.0161        | 0.1990    |
| 2<br>$(\delta y')_{23,40}$                     | 0.0898    | 1.7230   | — 1.9040 | — 2.6380  | 1.4940   | — 0.0109   | 0.0241     | 0.0160     | — 0.0115   | — 0.0017      | 0.0389    |
| 3<br>$(\delta y')_{23,18}$                     | — 11.9100 | 1.3540   | 11.0100  | — 6.6150  | 6.2320   | 0.1423     | — 0.3263   | 1.6960     | — 2.9070   | 1.4180        | 2.6800    |
| 4<br>$(\delta y')_{23,0}$                      | — 1.8130  | 1.0150   | 1.0450   | — 2.8190  | 3.7380   | 0.0546     | — 0.1042   | 0.8996     | — 1.5150   | — 0.2574      | 1.0400    |
| 5<br>$(\delta y')_{16,65}$                     | 0.0287    | — 0.2866 | 1.4320   | — 2.3060  | — 0.1832 | 0.0204     | — 0.0025   | 0.5131     | — 0.9537   | 0.3120        | 0.5160    |
| 6<br>$(\delta y')_{16,0}$                      | — 1.3110  | 0.3779   | 14.1200  | — 11.9100 | 1.3140   | 0.0043     | — 0.1122   | 1.0650     | — 1.1870   | 0.6094        | 1.2700    |
| 7<br>$(H + F' \sin \alpha')_{14,5}$            | 0.0041    | — 0.0255 | 0.3959   | — 0.6426  | 0.0243   | 0.0057     | — 0.0016   | 0.1450     | — 0.2760   | 0.0964        | 0.1390    |
| 8<br>$(\delta y's)_{23,18}$                    | — 1.1760  | 1.7450   | — 0.4539 | — 3.6020  | 1.2140   | — 0.0069   | 0.0153     | 0.0549     | — 0.0943   | 0.0412        | 0.1740    |
| 9                                              | 5.6150    | — 0.6657 | — 3.7840 | 1.5520    | — 3.3960 | — 0.0195   | 0.1084     | — 0.3078   | 0.3871     | — 0.3213      | — 1.5000  |

**2<sup>me</sup> ITÉRATION**

|                                                | $Z_2$    | $Z_4$    | $Z_6$    | $Z_8$    | $Z_{10}$ | $\Gamma_3$ | $\Gamma_5$ | $\Gamma_7$ | $\Gamma_9$ | $\Gamma_{11}$ | Fonctions |
|------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|---------------|-----------|
| 1<br>$x'C - x'F$<br>$(\delta y')_{H_0} = 14,5$ | 0.1014   | — 0.5835 | 0.0358   | 0.7187   | 0.0080   | 0.0075     | — 0.0263   | — 0.0259   | 0.0053     | 0.0161        | 0.3690    |
| 2<br>$(\delta y')_{23,40}$                     | — 2.3840 | 2.8900   | — 1.5480 | — 2.3890 | 1.5700   | — 0.0038   | 0.0215     | 0.0131     | — 0.0073   | — 0.0044      | — 0.3060  |
| 3<br>$(\delta y')_{23,18}$                     | — 7.5680 | — 0.8171 | 7.7820   | — 7.2330 | 2.8590   | 0.0473     | — 0.2974   | 1.3790     | — 2.4990   | 1.3490        | 0.8360    |
| 4<br>$(\delta y')_{23,0}$                      | — 1.7460 | — 1.1400 | 1.2500   | — 3.3320 | 1.8470   | 0.0480     | — 0.1615   | 0.7852     | — 1.3630   | 0.6245        | 0.5810    |
| 5<br>$(\delta y')_{16,65}$                     | 0.1189   | — 0.0895 | 1.6110   | — 1.5290 | — 3.5160 | 0.0129     | — 0.0132   | 0.6891     | — 0.9900   | 0.2989        | 0.2520    |
| 6<br>$(\delta y')_{16,0}$                      | — 3.8550 | — 1.7060 | 5.6400   | — 3.0350 | 0.0111   | 0.0223     | — 0.1409   | 0.5672     | — 1.0720   | 0.6075        | 0.3430    |
| 7<br>$(H + F' \sin \alpha')_{14,5}$            | 0.0179   | — 0.0747 | 0.4540   | — 0.6968 | — 0.4232 | 0.0104     | — 0.0010   | 0.1315     | — 0.2567   | 0.0953        | 0.0710    |
| 8<br>$(\delta y's)_{23,18}$                    | — 3.6750 | 2.7320   | — 0.1387 | — 3.1910 | 1.0830   | — 0.0008   | 0.0131     | 0.0303     | — 0.0531   | 0.0247        | — 0.4420  |
| 9                                              | 4.3620   | — 1.1070 | — 1.8470 | 1.5100   | — 3.6030 | 0.0171     | 0.0813     | — 0.1829   | 0.2216     | — 0.2827      | — 0.6940  |

**3<sup>me</sup> ITÉRATION**

|                                                | $Z_2$    | $Z_4$    | $Z_6$    | $Z_8$    | $Z_{10}$ | $\Gamma_3$ | $\Gamma_5$ | $\Gamma_7$ | $\Gamma_9$ | $\Gamma_{11}$ | Fonctions |
|------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|------------|---------------|-----------|
| 1<br>$x'C - x'F$<br>$(\delta y')_{H_0} = 14,5$ | 0.0843   | — 0.6163 | 0.1572   | 0.6835   | 0.0200   | 0.0083     | — 0.0248   | — 0.0311   | 0.0078     | 0.0151        | 0.2660    |
| 2<br>$(\delta y')_{23,40}$                     | — 2.1640 | 2.4410   | — 0.5252 | — 3.2240 | 0.9707   | — 0.0052   | 0.0205     | 0.0221     | — 0.0085   | — 0.0033      | 0.0281    |
| 3<br>$(\delta y')_{23,18}$                     | — 7.9140 | — 0.6270 | 8.9120   | — 5.2430 | 4.5570   | 0.0545     | — 0.2263   | 0.9839     | — 1.5410   | 0.7377        | 0.2470    |
| 4<br>$(\delta y')_{23,0}$                      | — 1.6470 | 0.7131   | 0.9718   | — 2.4830 | 1.6640   | 0.0287     | — 0.0799   | 0.6449     | — 0.9569   | 0.3350        | 0.1270    |
| 5<br>$(\delta y')_{16,65}$                     | — 0.0732 | — 0.4993 | 2.2140   | — 2.6870 | — 3.5100 | 0.0258     | — 0.0045   | 0.4961     | — 0.8227   | 0.1686        | 0.4250    |
| 6<br>$(\delta y')_{16,0}$                      | — 4.1960 | — 1.3700 | 6.0930   | — 2.1840 | 1.0910   | 0.0260     | — 0.1096   | 0.3972     | — 0.6627   | 0.3445        | 0.1790    |
| 7<br>$(H + F' \sin \alpha')_{14,5}$            | — 0.0159 | — 0.1154 | 0.5890   | — 0.7321 | — 0.7891 | 0.0067     | — 0.0004   | 0.1246     | — 0.2223   | 0.0539        | 0.1200    |
| 8<br>$(\delta y's)_{23,18}$                    | — 3.4290 | 2.2840   | 1.1920   | — 4.2450 | 0.5007   | — 0.0021   | 0.0136     | 0.0464     | — 0.0659   | 0.0254        | 0.0710    |
| 9                                              | 4.4550   | — 0.1341 | — 2.5930 | 0.4213   | — 5.7090 | 0.0111     | 0.0791     | — 0.0317   | — 0.1889   | — 0.1216      | — 0.3690  |



# MARCHE TRIGONOMETRIQUE

$$\theta_0 = 23 \text{ gr}, p_1 = 40,0 \quad \text{rate F}$$

$$\sin \theta_0 = 353.474.84/-1 \quad \text{tg } \theta_0 = 377.868.51/-1 \quad \text{cotg } \theta_0 = 264.642.32/0$$

|                                                                         | 1               | 3               | 5               | 7               | 9               | 11              |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| r                                                                       | 348.065.67/+1   | - 872.536.23/+2 | - 977.272.48/+1 | 327.966.07/+1   | 121.096.66/+2   | - 675.461.70/+1 |
| -p                                                                      | - 400.000.00/+1 | - 333.039.95/+1 | - 117.066.88/+1 | - 214.074.66/+1 | - 134.083.46/+1 | - 166.305.32/+1 |
| r-p                                                                     | - 519.343.30/0  | - 905.840.22/+2 | - 109.433.94/+2 | 113.891.41/+1   | 107.688.31/+2   | - 841.767.02/+1 |
| sin j                                                                   | - 527.414.23/-2 | 386.519.22/-1   | 687.855.91/-1   | 115.453.26/-1   | 356.416.43/-1   | 324.957.39/-1   |
| sin j'                                                                  | - 325.481.96/-2 | 626.319.61/-1   | 422.300.62/-1   | 122.053.73/-1   | 214.179.69/-1   | 540.761.59/-1   |
| -j                                                                      | 335.918.20/0    | - 252.645.42/+1 | - 482.895.83/+1 | - 736.641.00/0  | - 232.003.10/+1 | - 210.069.99/+1 |
| +j'                                                                     | - 207.244.90/0  | 430.878.99/+1   | 277.554.67/+1   | 120.435.82/+1   | 137.415.62/+1   | 363.727.76/+1   |
| e'                                                                      | 242.867.33/+1   | 421.100.90/+1   | 215.759.74/+1   | 262.531.46/+1   | 167.943.98/+1   | 320.971.81/+1   |
| sin e'                                                                  | 372.308.51/-1   | 614.272.55/-1   | 332.463.63/-1   | 400.794.10/-1   | 260.756.56/-1   | 483.090.81/-1   |
| r-p' = A                                                                | - 304.288.23/0  | - 889.648.32/+2 | - 124.134.71/+2 | 153.882.61/+1   | 994.661.28/+1   | - 756.097.51/+1 |
| p' = r-A                                                                | 378.494.49/+1   | 171.120.93/+1   | 264.074.66/+1   | 174.083.46/+1   | 216.305.32/+1   | 806.358.07/0    |
| $p' - x_0' = 733.364.19/+1 \quad y' = 404.629.44/+1 \quad dy' = 2676/0$ |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
| -tg j                                                                   | 528.149.35/-2   | - 419.090.36/-1 | - 947.659.32/-1 | - 116.230.50/-1 | - 381.468.53/-1 | - 343.605.32/-1 |
| +tg j'                                                                  | - 325.654.58/-2 | 803.420.50/-1   | 465.881.07/-1   | 191.469.79/-1   | 219.267.96/-1   | 642.863.86/-1   |
| B                                                                       | 202.494.77/-2   | 384.330.14/-1   | - 481.778.25/-1 | 752.392.89/-2   | - 162.200.57/-1 | 299.258.54/-1   |
| tg e'                                                                   | 401.147.39/-1   | 778.453.00/-1   | 352.516.14/-1   | 437.467.85/-1   | 270.100.80/-1   | 551.744.20/-1   |
| cotg e'                                                                 | 249.284.93/0    | 128.459.91/0    | 283.674.95/0    | 228.588.23/0    | 370.232.15/0    | 181.243.41/0    |
| $\frac{1}{r-p} \times (-p)$                                             | - 192.550.86/-1 | - 110.394.75/-3 | - 913.793.29/-3 | 878.029.34/-2   | 928.605.90/-3   | - 118.797.72/-2 |
|                                                                         | 770.203.44/0    | 367.653.62/-2   | 106.974.93/-1   | - 187.963.83/0  | - 124.510.69/-1 | 197.566.93/-1   |
| L <sub>1</sub>                                                          | 105.358.87/0    | 195.807.71/0    | 381.108.09/-1   | 121.343.50/0    | 629.228.59/-1   | 210.795.13/0    |
| L <sub>2</sub>                                                          | 389.900.42/-3   | 424.280.30/-4   | - 440.245.73/-3 | - 660.623.03/-3 | 150.620.41/-3   | 355.512.32/-3   |
| L <sub>3</sub>                                                          | - 155.962.17/-1 | - 141.302.29/-2 | 515.381.95/-2   | 141.422.65/-1   | - 201.957.05/-2 | - 591.235.91/-2 |
| A Cotg e'                                                               | - 758.544.70/0  | - 114.284.14/+3 | - 352.139.08/+2 | 351.757.53/+1   | 368.255.58/2    | - 137.037.69/+2 |
| 1 - B cotg e'                                                           | 949.521.11/-1   | 506.229.85/-1   | 236.668.42/0    | 828.011.84/-1   | 160.051.87/0    | 457.613.62/+1   |
| $\varpi$                                                                | - 288.928.10/0  | - 450.419.91/+2 | - 293.787.66/+2 | 127.416.62/+1   | 159.197.40/+2   | - 346.000.52/+1 |
| - $\varpi$ Cotg e                                                       | 764.626.03/0    | 112.282.90/+3   | 377.399.36/+2   | - 361.449.03/+1 | - 363.906.52/+2 | 128.100.52/+2   |
| M <sub>1</sub>                                                          | 608.133.00/-2   | - 200.124.00/+1 | 252.603.00/+1   | - 969.150.00/-1 | 434.906.00/0    | - 893.717.00/0  |
| M <sub>2</sub>                                                          | 556.333.54/-1   | 497.239.93/-1   | 268.461.19/0    | 111.875.53/0    | 147.831.64/0    | 411.040.73/-1   |
| M <sub>3</sub>                                                          | 155.961.07/+1   | 552.016.75/-1   | - 502.044.84/0  | - 654.136.99/0  | 180.875.39/0    | 122.775.46/0    |



# CALCUL DE : $\frac{dr}{r}$ ET de

1) Dérivées logarithmiques de  $r$

| par rapport à | 1                 | 3                 | 5                | 7                 | 9                | 11              |
|---------------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|------------------|-----------------|
| $Z_2$         | — 909.090.91 / —1 | 239.886.60 / +1   | 0                | 0                 | 0                | 0               |
| $Z_4$         | 0                 | — 148.040.68 / +1 | — 182.836.75 / 0 | 0                 | 0                | 0               |
| $Z_6$         | 0                 | 0                 | 297.809.98 / 0   | — 104.878.49 / 0  | 0                | 0               |
| $Z_8$         | 0                 | 0                 | 0                | 643.888.47 / —1   | 222.374.43 / 0   | 0               |
| $Z_{10}$      | 0                 | 0                 | 0                | 0                 | — 370.053.29 / 0 | 207.932.44 / 0  |
| $\Gamma_3$    | 0                 | 105.263.16 / —2   | 0                | 0                 | 0                | 0               |
| $\Gamma_5$    | 0                 | 0                 | 117.647.06 / —2  | 0                 | 0                | 0               |
| $\Gamma_7$    | 0                 | 0                 | 0                | — 123.456.79 / —2 | 0                | 0               |
| $\Gamma_9$    | 0                 | 0                 | 0                | 0                 | 121.951.22 / —2  | 0               |
| $\Gamma_{11}$ | 0                 | 0                 | 0                | 0                 | 0                | 122.850.12 / —2 |

2) Dérivées de  $e$

| par rapport à | 2                 | 4                 | 6                | 8                | 10                |
|---------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|
| $Z_2$         | — 413.223.14 / 0  | 0                 | 0                | 0                | 0                 |
| $Z_4$         | 0                 | — 292.134.08 / 0  | 0                | 0                | 0                 |
| $Z_6$         | 0                 | 0                 | — 625.000.00 / 0 | 0                | 0                 |
| $Z_8$         | 0                 | 0                 | 0                | 160.000.00 / +1  | 0                 |
| $Z_{10}$      | 0                 | 0                 | 0                | 0                | — 416.666.67 / +1 |
| $\Gamma_3$    | — 909.090.91 / —1 | 540 540 54 / —1   | 0                | 0                | 0                 |
| $\Gamma_5$    | 0                 | — 540 540 54 / —1 | 125.000.00 / 0   | 0                | 0                 |
| $\Gamma_7$    | 0                 | 0                 | — 125.000.00 / 0 | — 400.000.00 / 0 | 0                 |
| $\Gamma_9$    | 0                 | 0                 | 0                | 400.000.00 / 0   | 883.333.33 / 0    |
| $\Gamma_{11}$ | 0                 | 0                 | 0                | 0                | — 883.333.33 / 0  |



# **CALCUL DES DÉRIVÉES DE $y'_{21,40}$ PAR RAPPORT à :**

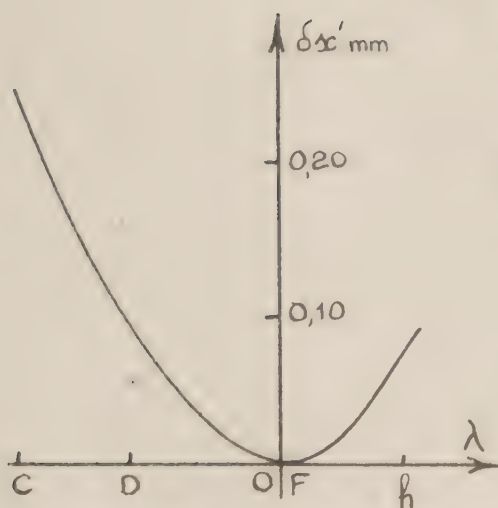
|    |           | $z_2$        | $z_4$        | $z_6$        | $z_8$        | $z_{10}$      |
|----|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 1  | $de_2$    | 141.784/-1   | 0            | 0            | 0            | 0             |
|    | $dp_2$    | - 100.460/+1 | 0            | 0            | 0            | 0             |
| 3  | $de_4$    | - 656.036/-2 | 209.188/-1   | 0            | 0            | 0             |
|    | $dp_4$    | 540.943/ 0   | - 525.028/ 0 | 0            | 0            | 0             |
| 5  | $de_6$    | - 488.168/-2 | 260.828/-3   | 153.434/-1   | 0            | 0             |
|    | $dp_6$    | 128.651/+1   | 368.414/-1   | - 870.140/ 0 | 0            | 0             |
| 7  | $de_8$    | - 144.226/-1 | 800.813 -3   | 953.437 -2   | 910.604/-2   | 0             |
|    | $dp_8$    | 144.402 +1   | 403.825 -1   | - 302.255 0  | - 202.119/+1 | 0             |
| 9  | $de_{10}$ | - 690.012/-2 | 564.719 -3   | 554.332 -2   | - 180.555/-2 | 747.345 -2    |
|    | $dp_{10}$ | 207.199/+1   | 631.809 -1   | - 405.422 0  | - 254.613/+1 | 349.733 1     |
| 11 | $de'$     | - 717.834 -2 | 141.502 -2   | 102.451 -1   | - 128.878/-1 | 158.935/-1    |
|    | $dp'$     | 913.340 0    | 209.229 -1   | - 216.192 0  | - 103.042/+1 | 162.604/+1    |
|    | $dy'$     | - 119.062 +1 | 135.363 0    | 110.075 -1   | - 661.470 0  | 623.240 0     |
|    |           | $\Gamma_2$   | $\Gamma_4$   | $\Gamma_6$   | $\Gamma_8$   | $\Gamma_{10}$ |
| 1  | $de_2$    | 0            | 0            | 0            | 0            | 0             |
|    | $dp_2$    | 909.091 -1   | 0            | 0            | 0            | 0             |
| 3  | $de_4$    | 236.970 -4   | 0            | 0            | 0            | 0             |
|    | $dp_4$    | - 826.935/-2 | 540.541 -1   | 0            | 0            | 0             |
| 5  | $de_6$    | 454.364 -4   | - 177.338/-3 | 0            | 0            | 0             |
|    | $dp_6$    | - 216.014 -1 | 142.079/-1   | 125.000 0    | 0            | 0             |
| 7  | $de_8$    | 197.838/-3   | - 309.049/-3 | - 651.123 -3 | 0            | 0             |
|    | $dp_8$    | - 242.107/-1 | 160.670/-1   | 531.769 0    | - 400.000 0  | 0             |
| 9  | $de_{10}$ | 830.193/-4   | - 170.262/-3 | 391.209 -3   | - 627.110/-3 | 0             |
|    | $dp_{10}$ | - 349.307/-1 | 224.080/-1   | 783.291 0    | - 142.245/+1 | 233.333 0     |
| 11 | $de'$     | 613.575/-4   | - 279.241/-3 | 360.935 -2   | - 637.890 -2 | 288.967 -2    |
|    | $dp'$     | - 151.446/-1 | 107.323/-1   | 312.468 0    | - 528.639 0  | 344.042 0     |
|    | $dy'$     | 142.255/-1   | - 326.341/-2 | 169.563/ 0   | - 290.725/ 0 | 141.810/ 0    |



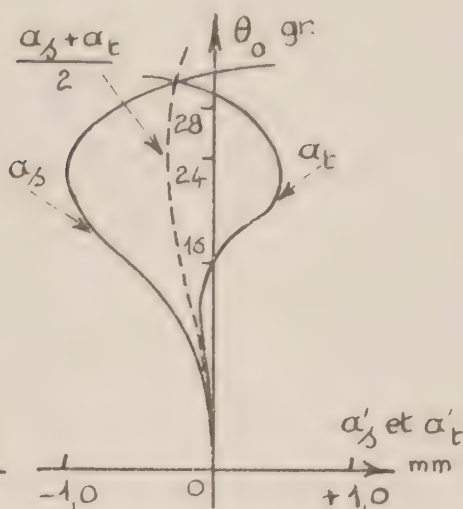
# EXEMPLE N° 1

## Courbes d'aberrations obtenues

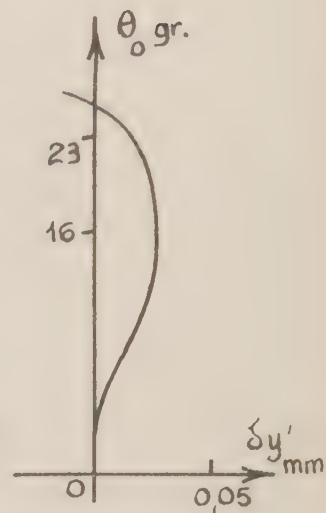
$F' \approx 100 \text{ mm.}$



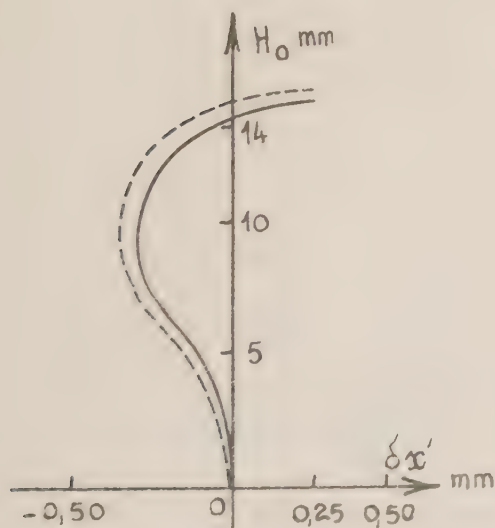
Aberration chromatique  
 $x' - x'_0$



Astigmatisme et  
courbure de champ  
 $\alpha'_s, \alpha'_t, \frac{\alpha'_s + \alpha'_t}{2}$



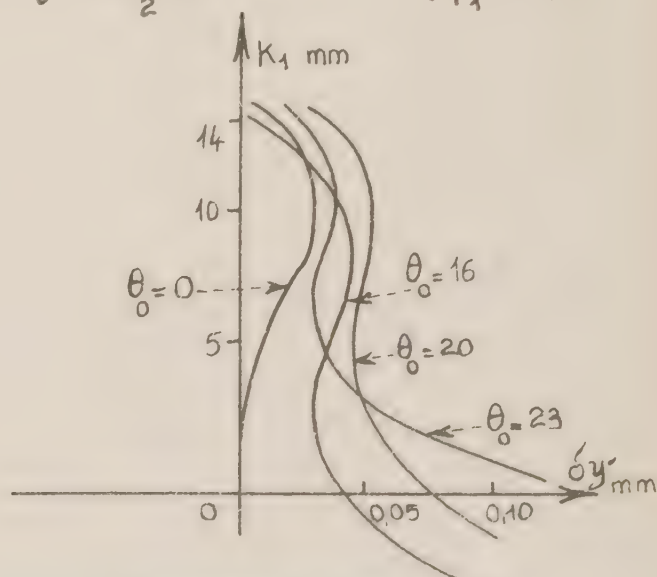
Distorsion  
 $y' - y'_0$   
( $\theta_1 = 18,0$ )



Aberration sphérique et  
condition des sinus

En trait plein,  $x' - x'_0 = \delta x'$

En pointillé,  $\frac{\phi + F'}{F'}$ , où  $\phi = \frac{H_0}{\sin \alpha'}$



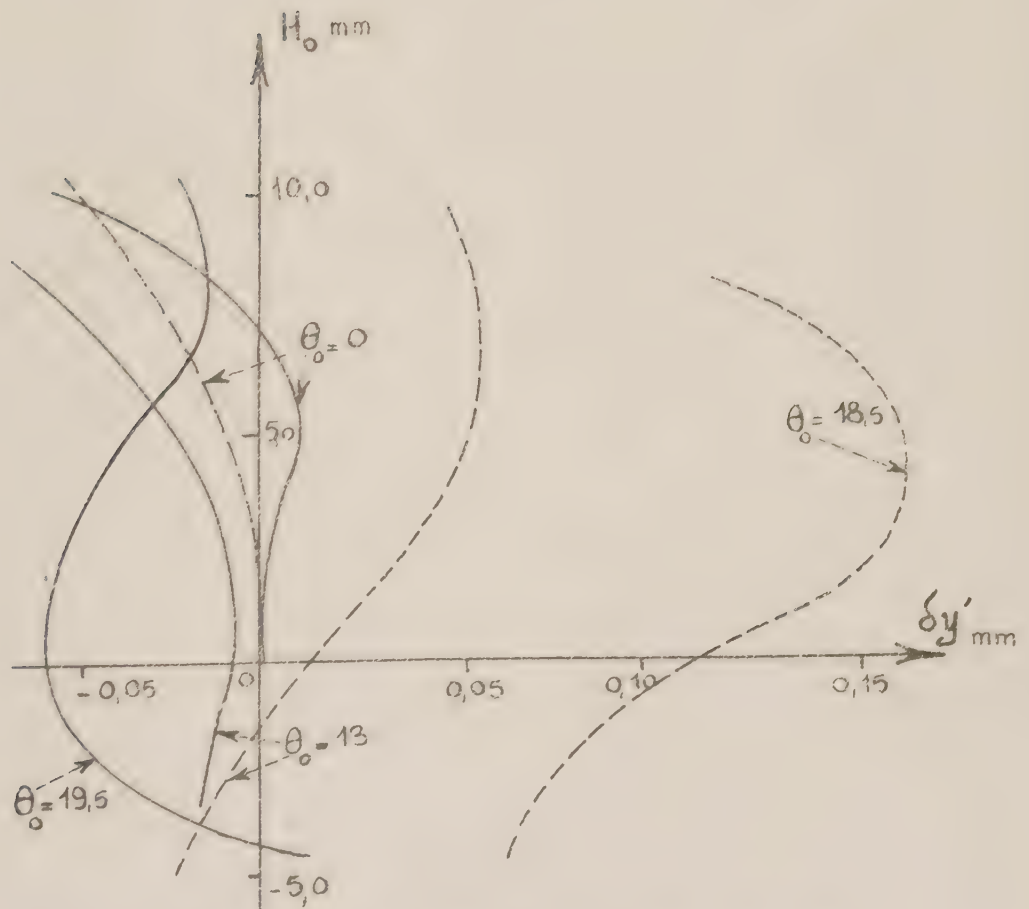
Courbes de définition  
 $y' - y'_0$



## EXEMPLE N°2

### Courbes d'aberrations obtenues

$$F' = 100 \text{ mm}$$



En traits pleins = Courbes obtenues par nous

En pointillés = Courbes obtenues par M<sup>r</sup> Van Heel



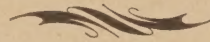
DEUXIÈME THÈSE

---

Propositions données par la Faculté

---

QUELQUES ASPECTS  
DU CALCUL SYMBOLIQUE



Vu et approuvé :

Paris, le 16 juin 1951

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.



## FACULTÉ DES SCIENCES

*Nom du Candidat :* PELTIER.

*Prénoms :* JEAN-PIERRE-HENRI.

*Date de la soutenance :* 19 juin 1951.

*Numéro d'ordre :* Série A 2407. — N° 3279.

PELTIER (JEAN). — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique. — Paris, C.N.R.S., Institut Blaise-Pascal. — In-4°, 68 p., fig.

*Th. Sc. Math. Paris, 1951.*  
*Sér. A. 2407, N° 3279.*

PELTIER (JEAN). — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique. — Paris, C.N.R.S., Institut Blaise-Pascal. — In-4°, 68 p., fig.

*Th. Sc. Math. Paris, 1951.*  
*Sér. A. 2407, N° 3279.*

PELTIER (JEAN). — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique. — Paris, C.N.R.S., Institut Blaise-Pascal. — In-4°, 68 p., fig.

*Th. Sc. Math. Paris, 1951.*  
*Sér. A. 2407, N° 3279.*

PELTIER (JEAN). — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique. — Paris, C.N.R.S., Institut Blaise-Pascal. — In-4°, 68 p., fig.

*Th. Sc. Math. Paris, 1951.*  
*Sér. A. 2407, N° 3279.*

PELTIER (JEAN). — Méthode nouvelle permettant le calcul rapide d'un instrument d'optique. — Paris, C.N.R.S., Institut Blaise-Pascal. — In-4°, 68 p., fig.

*Th. Sc. Math. Paris, 1951.*  
*Sér. A. 2407, N° 3279.*

